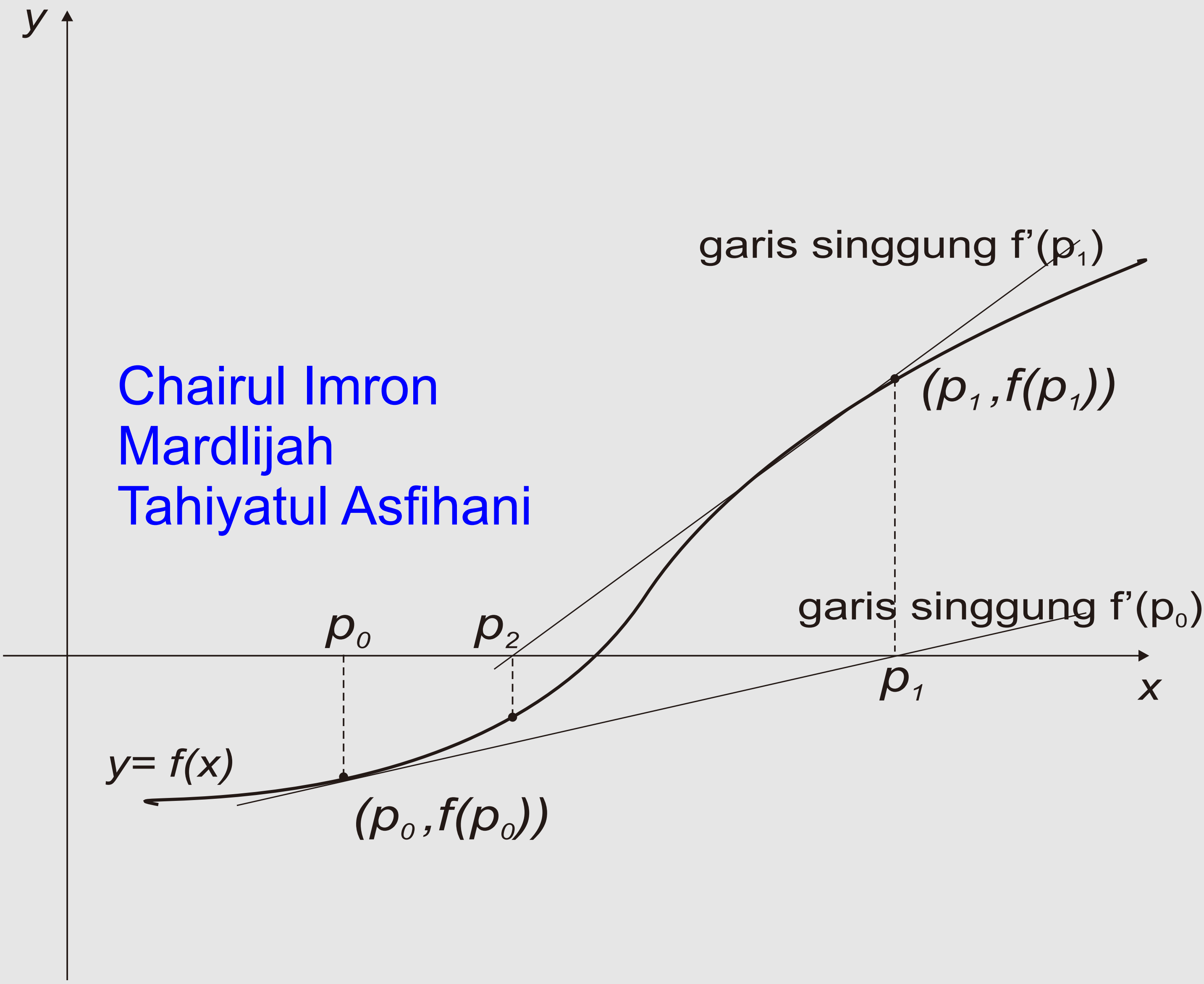
ISBN: 978-623-318-126-6

Metode Numerik

Chairul Imron
Mardlijah
Tahiyatul Asfihani



About this document:
Production managed by dMath
Typeset by $\mathcal{F}$-Building, Math. Dept., Nop. 2022
This book was set in LaTeX2e, Times Roman, 11pt

ISBN: 978-623-318-126-6

Metode Numerik

ISBN: 978-623-318-126-6

Disusun oleh:

- Chairul Imron
- Mardlijah
- Tahiyatul Asfihani

Dosen Departemen Matematika ITS

© 2022 Departemen Matematika ITS

Setting Layout dikerjakan oleh $\boxed{\text{STUDIO } \mathcal{F}\text{-one}}$ menggunakan LaTeX.

Kata Pengantar

Penguasaan dasar matematika yang baik dan benar merupakan hal yang paling pokok yang harus dimiliki untuk dapat mengikuti perkembangan ilmu pengetahuan, khususnya bidang sains dan teknologi. Matakuliah Metode Numerik merupakan matakuliah yang diwajibkan bagi mahasiswa di Departemen Matematika tahap sarjana di setiap Perguruan Tinggi. Hal ini dimaksudkan untuk memberikan landasan pengetahuan mahasiswa agar dapat dengan mudah mengukuti matakuliah lain pada semester-semester selanjutnya.

Selain untuk menguasai materi Metode Numerik itu sendiri, matakuliah ini juga ditujukan untuk memberikan bekal kepada mahasiswa agar:

1. mampu mengembangkan terus pola pikir ilmiah yang logis, kritis, dan sistematis;

2. terlatih daya nalar dan kreatifitasnya, sebagai hasil dari pengalamannya ketika mempelajari berbagai strategi dan metode pemecahan masalah dalam matematika;

3. dapat menerapkan model-model matematika yang sederhana pada masalah nyata yang terkait dalam sains, teknologi, maupun bidang yang lain.

Selain sebagai buku referensi pokok untuk mahasiswa, buku ini juga ditujukan sebagai penunjuk arah bagi mahasiswa yang tertarik dan ingin menguasai atau mengembangkan materi Metode Numerik, serta keterkaitannya dengan penerapan Metode Numerik pada matakuliah lain di tingkat selanjutnya.

Buku ini disusun dengan penyajian materi sedemikian rupa sehingga tidak terlalu teoretik, namun juga tidak terlalu dangkal analisisnya bagi mahasiswa Departemen Matematika. Semoga buku ini dapat membantu mahasiswa sebagaimana tujuan dari matakuliah Metode Numerik diberikan untuk mahasiswa.

Penyusun

Daftar Isi

Bab 1

Galat, Algoritma dan Konvergensi

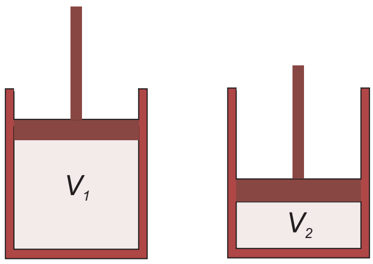
Masih ingatkan mata pelajaran kimia, bahwa hukum gas ideal mempunyai rumus

$$PV = nRT$$

dengan P adalah tekanan, V adalah Volume, n adalah jumlah molekul, R adalah konstanta, dan T adalah temperatur. Perhatikan Gambar 1.1, andaikan pada suatu eksperimen atau percobaan untuk membuktikan hukum gas ideal. Pada eksperimen pertama, diketahui

$$P = 1.00\ atm, \quad V = 0.100\ m^3, \quad N = 0.00420\ mol, \quad \text{dan} \quad R = 0.08206$$

Ketika megukur temperatur dari gas, ditemukan temperatur sebenarnya adalah $15^o C$.



Gambar 1.1: Sketsa Gas Ideal

Kemudian percobaan diulangi dengan menggunakan nilai R dan N yang sama, tetapi dua faktor yang diubah, yaitu tekanan P dan volume V. Faktor yang pertama, tekanan ditingkatkan atau dinaikkan dan volume diturunkan atau sebaliknya. menurunkan tekanan dan menaikkan volume, sehingga nilai PV tidak berubah dan diharapkan prediksi temperatur adalah $17^o C$. Tetapi hasil dari percobaan tersebut menghasilkan temperatur sebenarnya yaitu $19^o C$.

Jelas, dari hasil percobaan di atas, apakah bisa disimpulkan bahwa hukum gas ideal tidak valid? Perlu diperiksa data untuk melihat, apakah kesalahan itu dapat dikaitkan dengan hasil percobaan?. Oleh karena itu, mungkin perlu ditentukan seberapa jauh keakuratan percobaan yang dilakukan dan memastikan pada saat percobaan tidak terjadi kesalahan. Analisis kesalahan dalam perhitungan merupakan topik penting dalam numerik.

1.1 Galat

Sebelum mempelajari tentang galat (*error*), perlu dipelajari terlebih dahulu tentang beberapa definisi dan teorema yang ada pada kalkulus, terutama tentang limit dan kontinuitas suatu fungsi.

Definisi 1.1.1 *Fungsi f didefinisikan pada himpunan bilangan real X mempunyai limit L pada X_0, ditulis*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

jika diberikan bilangan real $\varepsilon > 0$, ada bilangan real $\delta > 0$ sedemikian hingga

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ dengan } x \in X \text{ dan } 0 < |x - x_0| < \delta$$

Definisi 1.1.2 *Fungsi f didefinisikan pada himpunan bilangan real X dan $x_0 \in X$. f adalah kontinu pad x_0 jika*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Fungsi f adalah pada himpunan X jika f kontinu pada setiap bilangan di X.

Definisi 1.1.3 *Andaikan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan bilangan real takterbatas. Barisan ini mempunyai limit x (konvergen ke x), jika $\exists\ \varepsilon > 0$ ada bilangan positif integer $N(\varepsilon)$ sedemikian hingga $|x_0 - x| < \varepsilon$ dengan $n > N(\varepsilon)$. Notasi*

$$\lim_{x \to \infty} x_n = x, \text{ atau } x_n \to x, \text{ untuk } n \to \infty$$

ini berarti barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke x

Definisi 1.1.4 *Jika f adalah fungsi yang didefinisikan pada himpunan bilangan real X dan $x_0 \in X$, maka pernyataan di bawah ini adalah equivalen*

1. *f kontinu pada x_0*
2. *Jika $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan di X yang konvergen ke x_0, maka $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$*

Fungsi-fungsi yang akan digunakan untuk mendiskusikan metode numerik diasumsikan sebagai fungsi yang kontinu, sehingga fungsi-fungsi tersebut dapat dibandingkan dengan nilai hampiran yang didapatkan dari metode numerik yang digunakan.

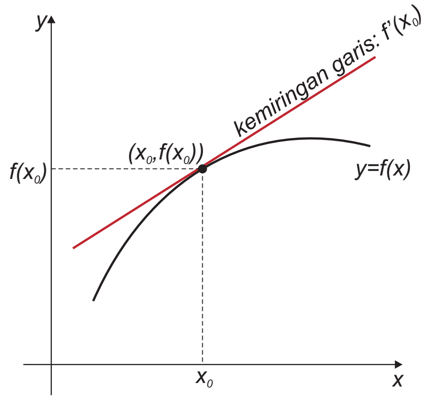
Asumsi yang lebih baik tentang fungsi umumnya mengarah pada hasil pendekatan yang lebih baik. Misalnya, fungsi dengan grafik mulus biasanya berperilaku lebih mudah dapat diprediksi dari pada fungsi yang terpotong-potong dan tidak mulus. Kondisi mulus tidaknya suatu fungsi tergantung pada konsep dari turunan dari fungsi.

DEFINISI 1.1.5 *Jika f adalah fungsi yang didefinisikan pada selang terbuka yang mengandung x_0. Fungsi f dapat diturunkan pada x_0 jika*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ada. Bilangan $f'(x_0)$ dinamakan turunan dari f di x_0. Fungsi yang mempunyai turunan di setiap titik di X dinamakan dapat diturunkan pada X.

Turunan dari f pada x_0 adalah kemiringan garis singgung pada grafik f pada titik $(x_0, f(x_0))$, seperti pada Gambar 1.2.



Gambar 1.2: Sketsa grafik singgung pada $y = f(x)$

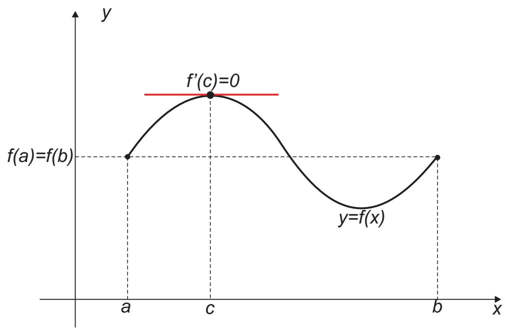
TEOREMA 1.1.6 *Teorema Kontinuitas*
Jika f fungsi yang dapat diturunkan pada x_0, maka f kontinu pada x_0.

Beberapa Teorema berikut adalah konsep dasar yang penting untuk menurunkan metode kesalahan estimasi.

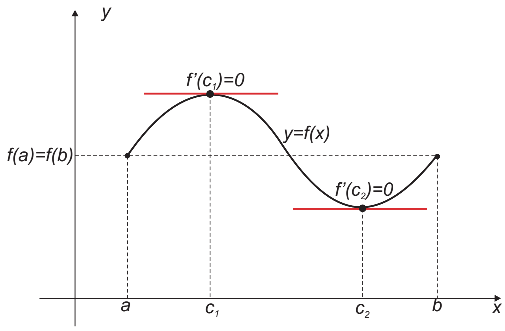
TEOREMA 1.1.7 *Teorema Rolle*
Andaikan $f \in C[a, b]$ dan f dapat diturunkan pada (a, b). Jika $f(a) = f(b)$, maka ada bilangan $c \in (a, b)$ dengan $f'(c) = 0$. (Lihat Gambar 1.3)

TEOREMA 1.1.8 *Teorema Nilai Rata-Rata*
Jika $f \in C[a, b]$ dan f dapat diturunkan pada (a, b), maka ada bilangan $c \in (a, b)$ dengan.

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Gambar 1.3: Sketsa grafik Teorema Rolle



Gambar 1.4: Sketsa grafik Teorema Nilai Ekstrim

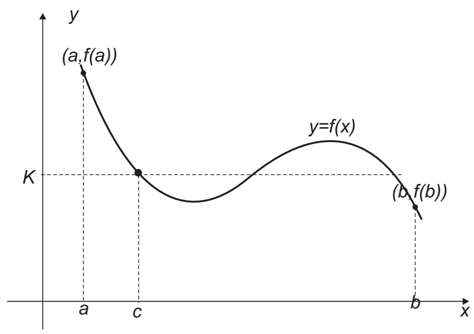
TEOREMA 1.1.9 *Teorema Nilai Ekstrim*
Jika $f \in C[a,b]$, maka ada $c_1, c_2 \in [a,b]$ dengan $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$, untuk semua $x \in [a,b]$. Jika f dapat diturunkan pada (a,b), maka ada bilangan c_1 dan c_2 terjadi di akhir $[a,b]$ atau di $f' = 0$. (Lihat Gambar 1.4)

TEOREMA 1.1.10 *Teorema Rolle Umum*
Andaikan $f \in C[a,b]$ dan f dapat diturunkan n kali pada (a,b). Jika $f(x) = 0$ pada n_1 titik yang berbeda $a \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq b$, maka ada bilangan $c \in (x_0, x_n)$ dan karenanya di dalam (a,b), ada dengan $f^{(n)}(c) = 0$.

Teorema Nilai Tengah juga digunakan, yaitu

TEOREMA 1.1.11 *Teorema Nilai Tengah*
Andaikan $f \in C[a,b]$ dan K adalah bilangan diantara $f(a)$ dan $f(b)$, maka ada bilangan $c \in (a,b)$ sehingga $f(c) = K$.

Gambar 1.5 menunjukkan satu pilihan untuk bilangan yang dapat digunakan oleh Teorema Nilai Tengah. Pada Gambar ini, ada dua kemungkinan titik yang dapat digunakan.



Gambar 1.5: Sketsa grafik Teorema Nilai Tengah

CONTOH 1.1.1 Tunjukkan bahwa $x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ mempunyai sebuah solusi pada selang $[0, 1]$.

Penyelesaian
Dengan mempertimbangkan fungsi yang didefinisikan $f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1$. Fungsi f adalah kontinu pad $[0, 1]$ dan

$$f(0) = -1 < 0 \quad \text{dan} \quad 0 < 1 = f(1)$$

Teorema Nilai Tengah mengartikan bahwa ada bilangan x, dengan $0 < x < 1$, yang memenuhi $x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$. ◀

Pada Contoh 1.1.1, bahwa Teorema Nilai Tengah digunakan untuk menentukan kapan masalah-masalah tertentu mempunyai solusi. Namun, tidak memberikan cara yang efisien untuk menemukan solusi itu.

DEFINISI 1.1.12 *Integral Riemann dari fungsi f pada selang $[a, b]$ didefinisikan sebagai berikut*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{max \triangle x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(z_i) \triangle x_i$$

dengan bilangan $x_0, x_1, \ldots, x_n$ yang memenuhi $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$ dengan $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ dan z_i titik acak di dalam selang $[x_i, x_{i-1}]$.

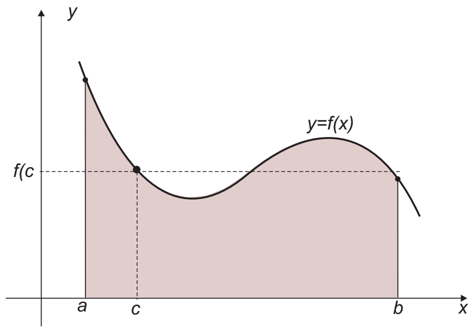
TEOREMA 1.1.13 *Teorema Nilai Rata-Rata*
Andaikan $f \in C[a, b]$, integral Riemann dari g ada di $[a, b]$ dan $g(x)$ tidak berubah tanda pada $[a, b]$, maka ada bilangan c pada $[a, b]$ dengan

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$$

Ketika $g(x) \equiv 1$, Teorema 1.1.13 dinamakan Teorema Nilai Rata-Rata. Nilai rata-rata dari fungsi f pada interval $[a, b]$ adalah

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

(lihat Gambar 1.6)



Gambar 1.6: Sketsa grafik Teorema Nilai Rata-Rata

Beberapa Definisi dan Teorema di atas hanya untuk mereview dan memastikan bahwa fungsi-fungsi yang akan digunakan di modul-modul yang akan datang mempunyai sifat dan memenuhi kriteria seperti definisi dan teorema yang sudah dijelaskan. Berikut ini akan dijelaskan teorema-teorema tentang kesalahan atau galat.

TEOREMA 1.1.14 *Teorema Taylor's*
Andaikan $f \in C[a, b]$, *bahwa* $f^{(n+1)}$ *ada pada* $[a, b]$, *dan* $x_0 \in [a, b]$. *Untuk setiap* $x \in [a, b]$ *ada bilangan* $\xi(x)$ *diantara* x_0 *dan* x *dengan*

$$f(x) = P_n(x) + R(x)$$

dengan

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\ R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

$P_n(x)$ dinamakan polinomial Taylor order n untuk f di sekitar x_0, dan $R_n(x)$ dinamakan bentuk sisa atau kesalahan pemotongan yang berhubungan dengan $P_n(x)$. Karena bilangan $\xi(x)$ ada dalam kesalahan pemotongan $R_n(x)$ yang tergantung pada x pada polinomial $P_n(x)$ yang dievaluasi. Teorema Taylor hanya memastikan fungsi itu ada, dan nilainya diantara x dan x_0. Salah satu masalah umum pada metode numerik adalah mencoba menentukan batas yang realistis untuk nilai $f^{(n+a)}(\xi(x))$ dan x pada selang tertentu.

Deret tak terbatas yang diperoleh dengan limit $P_n(x)$ dengan $n \to \infty$ dinamakan deret Taylor untuk f untuk x_0. Pada kasus $x_0 = 0$, polinomial Taylor sering dinamakan polinomial Maclaurin, dan deret Taylor sering dinamakan dengan deret Maclaurin.

Kesalahan pemotongan pada polinomial Taylor mengacu pada kesalahan yang terlibat dalam menggunakan penjumlahan terpotong, atau berhingga, untuk memperkirakan jumlah deret tak hingga

Contoh 1.1.2 Andaikan $f(x) = \cos x$ dan $x_0 = 0$. Tentukan

a. Polinomial Taylor order dua untuk f pada x_0, dan

b. Polinomial Taylor order tiga untuk f pada x_0.

Penyelesaian

Diketahui $F \in C^\infty(R)$, teorema Taylor dapat digunakan untuk $n \geq 0$, juga

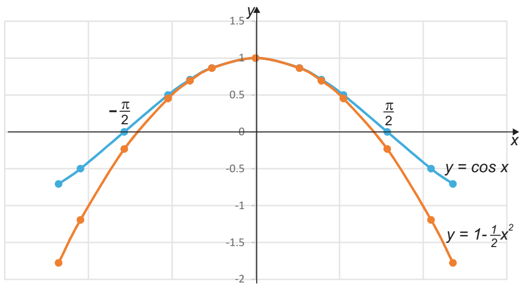
$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x \\ f''(x) &= -\cos x \\ f'''(x) &= \sin x \\ f^{(4)}(x) &= \cos x \end{aligned}$$

sedemikian hingga

$$\begin{aligned} f(0) &= \cos 0 = 1 \\ f'(0) &= -\sin 0 = 0 \\ f''(0) &= -\cos 0 = -1 \\ f'''(0) &= \sin 0 = 0 \\ f^{(4)}(0) &= \cos 0 = 1 \end{aligned}$$

a. Untuk $n = 2$ dan x_0, maka

$$\begin{aligned} \cos x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi(x))}{3!}x^3 \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \sin \xi(x) \end{aligned}$$



Gambar 1.7: Sketsa grafik $f(x) = \cos x$ dan $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$

dengan $\xi(x)$ bilangan diantara 0 dan x, lihat Gambar 1.7. Ketika $x = 0.01$, maka

$$\begin{aligned} \cos 0.01 &= 1 - \frac{1}{2}(0.01)^2 + \frac{1}{6}(0.01)^3 \sin\xi(0.01) \\ &= 0.99995 + \frac{10^{-6}}{6} \sin\xi(0.01) \end{aligned}$$

Pendekatan ke $\cos 0.01$ diberikan dengan polinomial Taylor adalah 0.99995. Kesalahan pemotongan atau bentuk sisa, diasosiasikan dengan pendekatan adalah

$$\frac{10^{-6}}{6} \sin\xi(0.01) = 0.1\bar{6} \times 10^{-6} \sin\xi(0.01)$$

karena nilai $\sin\xi(0.01)$ diantara $[-1, 1]$, sedemikian hingga nilai perkiraan 0.99995 untuk nilai $\cos 0.01$ dibatasi oleh

$$|\cos 0.01 - 0.99995| = 0.1\bar{6} \times 10^{-6} |\sin\xi(0.01)| \leq 0.1\bar{6} \times 10^{-6}$$

Karenanya, nilai pendekatan 0,99995 adalah tepat, setidaknya lima digit pertama untuk $\cos 0, 01$, dan

$$0.999483 = 0.99995 - 0.1\bar{6} \times 10^{-6} \leq \cos 0.01$$

dan

$$\cos 0.01 \leq 0.99995 + 0.1\bar{6} \times 10^{-6} < 0.9999517$$

Batas kesalahan jauh lebih besar dari kesalahan yang sebenarnya. Ini sebagian karena batasan yang sempit yang digunakan untuk $|\sin\xi(x)|$, karena $|\sin x| \leq |x|$ dan $0 \leq \xi \leq 0.01$, faktanya bahwa $|\sin\xi(x)| \leq 0.01$ dalam rumus kesalahan, menghasilkan batas $0.1\bar{6} \times 10^{-8}$.

b. Untuk $n = 3$ dan x_0 serta $f'''(0) = 0$, maka polinomial Taylor dengan sisa di sekitar $x_0 = 0$ adalah

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \cos\xi(x)$$

dengan $0 < \xi(x) < 0.01$. Polinomial yang mendekati tetap sama, dan nilai pendekatan yang sama yaitu 0.99995, tetapi mempunyai jaminan akurasi yang jauh lebih baik. Karena $|\cos\xi(x)| \leq 1$ untuk semua x, dan

$$\left|\frac{1}{24}x^4 \cos\xi(x)\right| \leq \frac{1}{24}(0.01)^4(1) \approx 4.2 \times 10^{-10}$$

sehingga

$$|\cos 0.01 - 0.99995| \leq 4.2 \times 10^{-10}$$

dan

$$\begin{aligned} 0.99994999948 &= 0.99995 - 4.2 \times 10^{-10} \\ &\leq \cos 0.01 \\ &\leq 0.99995 + 4.2 \times 10^{-10} = 0.99995000042 \end{aligned}$$

◀

Contoh di atas adalah contoh kesalahan atau galat yang disebabkan oleh pemotongan. Sekarang akan dibahas kesalahan atau galat yang disebabkan oleh kesalahan pembulatan.

Aritmatika yang dilakukan oleh kalkulator atau komputer berbeda dengan aritmatika pada matakuliah aljabar atau kalkulus. Sudah terbiasa dengan aritmatika seperti seperti $2+2=4$, $4\times 8=32$, dan $(\sqrt{3})^2=3$. Namun, aritmatika yang dilakukan oleh komputer, mengharapkan hasil yang tepat untuk $2+2=4$, $4\times 8=32$, tetapi ketidakpastian yang tepat untuk $(\sqrt{3})^2=3$. Untuk memahami mengapa hal ini adalah benar, maka perlu menjelajahi dunia aritmatika komputer.

Dalam dunia matematika tradisional, dibolehkan bilangan dengan jumlah digit tak terbatas. Aritmatika yang sering digunakan di dunia ini mendefinisikan $\sqrt{3}$ sebagai angka positif yang unik, jika $\sqrt{3}$ dikalikan dengan dirinya sendiri $(\sqrt{3})$ akan menghasilkan bilangan 3. Di dunia komputasi, setiap bilangan direpresentasikan hanya memiliki sejumlah digit yang tetap dan terbatas. Sebagai contoh bilangan rasional — dan bahkan tidak semua bilangan rasional — dapat direpresentasikan dengan tepat. Karena $\sqrt{3}$ bilangan irrasional, itu diberikan representasi perkiraan, bila $\sqrt{3}$ dikuadratkan tidak mungkin menghasilkan tepat 3, meskipun kemungkinan akan cukup dekat dengan 3.

Kesalahan yang dihasilkan saat menggunakan kalkulator atau komputer untuk melakukan perhitungan bilangan real dinamakan kesalahan pembulatan (*round-off error*). Hal ini disebabkan oleh aritmatika dalam mesin yang melibatkan bilangan dengan jumlah digit yang terbatas, bahwa hasil perhitungan dilakukan hanya dengan perkiraan bilangan yang sebenarnya. Didalam komputer, hanya sebagian kecil dari sistem bilangan real yang digunakan untuk representasi semua bilangan real. Bagian ini hanya berisi bilangan rasional, baik positif maupun negatif, dan menyimpan bagian pecahan, bersama dengan bagian eksponensial.

Bilangan Mesin Binary

Komputer dengan register 64-bit (*binary digit*) dapat merepresentasikan bilangan real. Bit pertama sebagai tanda (*sign*, positif atau negatif) dinotasikan dengan s. Kemudian 11-bit digunakan sebagai eksponen (pangkat) dinotasikan dengan c disebut karakteristik, dan 52-bit terakhir sebagai pecahan binary dinotasikan dengan f dan dinamakan *mantissa*. 52-bit dapat merepresentasikan antara 16 dan 17 digit desimal. 11-bit eksponen memberikan selang antara 0 sampai $2^{11}-1=2047$, jika termasuk eksponen negatif maka selang bilangan yang dapat digunakan adalah dari -1023 sampai dengan 1024.

Untuk menghemat penyimpanan dan memberikan representasi unik untuk setiap bilangan pecahan. Menggunakan sistem bilangan binary, memberikan bilangan pecahan dengan bentuk

$$(-1)^s 2^{c-1023}(1+f)$$

Perhatikan bilangan binary berikut

0 10000000011 1011100100010000000000000000000000000000000000000000

Digit paling kiri adalah $s=0$, yang mengindikasikan bahwa bilangan tersebut adalah positif. 11-bit kemudian adalah 10000000011, adalah karakteristik yang equivalen dengan bilangan desimal

$$c = 1\cdot 1^{10} + 0\cdot 1^9 + \cdots + 0\cdot 1^2 + 1\cdot 1^1 + 1\cdot 1^0 = 1027$$

Bagian eksponen dari bilangan tersebut adalah $2^{1027-1023} = 2^4$. Dan 53-bit terakhir yaitu mantissa adalah

$$f = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
(-1)^s 2^{c-1023}(1+f) &= (-1)^0 \cdot 2^4 \left(1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096}\right)\right) \\
&= 27.56640625
\end{aligned}$$

oleh karena itu, bilangan terkecil adalah

$$0100000000111011100100001111111111111111111111111111111111111111$$

dan bilangan terbesar adalah

$$0100000000111011100100010000000000000000000000000000000000000001$$

Hal ini berarti, bilangan asli dari mesin merepresentasikan tidak hanya bilangan 27.56640625, tetapi separuh dari bilangan real diantara 27.56640625 dan bilangan terkecil berikutnya serta diantara 27.56640625 dan bilangan terbesar berikutnya. Jadi bilangan 27.56640625 tersebut masuk pada selang

$$[27.5664062499999982236431605997495353221893310546875,$$

$$27.5664062500000017763568394002504646778106689453125]$$

Bilangan positif terkecil yag mungkin adalah bilangan yang mempunyai $s = 0$, $c = 1$ dan $f = 0$ yang equivalen dengan

$$2^{-1022} \cdot (1+0) \approx 0.22251 \times 10^{-307}$$

dan bilangan terbesar mempunyai $s = 0$, $c = 2046$ dan $f = 1 - 2^{-52}$ yang equivalen dengan

$$2^{1023} \cdot (2 - 2^{-52}) \approx 0.17977 \times 10^{309}$$

Bilangan Mesin Desimal

Penggunaan digit binary cenderung mengalami kesulitan dalam perhitungan ketika sekumpulan bilangan mesin yang terbatas digunakan untuk merepresentasikan semua bilangan real. Untuk permasalahan ini, gunakan bilangan desimal yang umum. Diasumsikan bahwa bilangan mesin merepresentasikan dalam desimal yang normal dalam bentuk floating-point, yaitu

$$\pm 0.d_1 d_2 d_3 \ldots d_k \times 10^n, \quad 1 \leq d_1 \leq 9, \quad 0 \leq d_i \leq 9$$

dengan $i = 2, 3, \ldots, k$. Bentuk bilangan ini dinamakan k-digit bilangan mesin desimal.

Bilangan real positif dalam rentang mesin numerik dapat ditulis dalam bentuk

$$y = 0.d_1 d_2 d_3 \ldots d_k d_{k+1} d_{k+2} \cdots \times 10^n$$

Bentuk floating-point dari y dinotasikan dengan $fl(y)$, diperoleh dengan mengakhiri mantissa dari y pada digit desimal k. Ada dua cara umum melakukan penghentian ini. Pertama, metode yang disebut memotong (*chopping*), adalah dengan memangkas digit $d_{k+1}d_{k+2}\ldots$. Metode ini menghasilkan bentuk floating-point sebagai berikut

$$fl(y) = 0.d_1d_2d_3\ldots d_k \times 10^n$$

Metode yang kedua, dinamakan pembulatan (*rounding*), menambah $5 \times 10^{n-(k+1)}$ pada y dan hasilnya

$$fl(y) = 0.\delta_1\delta_2\delta_3\ldots\delta_k \times 10^n$$

Untuk pembulatan, ketika $d_{k+1} \geq 5$, tambahkan 1 pada d_k, hal ini dinamakan pembulatan ke-atas. Ketika $d_{k+1} < 5$, tidak perlu tambah 1 ke d_k, dinamakan pembulatan ke-bawah.

Contoh 1.1.3 Tentukan lima digit pada bilangan irrasional π, dengan cara

a. metode pemotongan

b. metode pembulatan

Penyelesaian

Bilangan π mempunyai desimal dari bentuk $\pi = 3.14159265\ldots$. Ditulis dalam bentuk desimal, seperti

$$\pi = 0.314159265\cdots \times 10^1$$

a. Bentuk floating-point dari π menggunakan pemotongan lima digit adalah

$$fl(\pi) = 0.31415 \times 10^1 = 3.1415$$

b. Ekspansi digit ke-enam desimal dari π adalah 9 (dan $9 > 5$), sehingga bentuk floating-point dari π menggunakan pembulatan lima digit adalah

$$fl(\pi) = (0.31415 + 0.00001) \times 10^1 = 3.1416$$

◀

Definisi berikut menjelaskan dua metode untuk mengukur kesalahan perkiraan.

Definisi 1.1.15 *Andaikan p^* adalah nilai penaksiran untuk p. Kesalahan mutlak dari p adalah*

$$|p - p^*|$$

dan kesalahan relatif adalah

$$\frac{|p - p^*|}{|p|}, \qquad p \neq 0$$

Untuk memperjelas definisi, perhatikan contoh berikut

Contoh 1.1.4 Tentukan kesalahan mutlak dan kesalahan relatif dari p terhadap penaksiran p^*

a. $p = 0.3000 \times 10^1$ dan $p^* = 0.3100 \times 10^1$

b. $p = 0.3000 \times 10^{-3}$ dan $p^* = 0.3100 \times 10^{-3}$

c. $p = 0.3000 \times 10^4$ dan $p^* = 0.3100 \times 10^4$

Penyelesaian

a. Untuk $p = 0.3000 \times 10^1$ dan $p^* = 0.3100 \times 10^1$, kesalahan mutlaknya adalah

$$|p - p^*| = |0.3000 \times 10^1 - 0.3100 \times 10^1| = 0.1$$

dan kesalahan relatifnya adalah

$$\frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|0.1|}{|0.3000 \times 10^1|} = 0.333\bar{3} \times 10^{-1}$$

.

b. $p = 0.3000 \times 10^{-3}$ dan $p = 0.3100 \times 10^{-3}$, kesalahan mutlaknya adalah

$$|p - p^*| = |0.3000 \times 10^{-3} - 0.3100 \times 10^{-3}| = 0.1 \times 10^{-4}$$

dan kesalahan relatifnya adalah

$$\frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|0.1 \times 10^{-4}|}{|0.3000 \times 10^{-3}|} = 0.333\bar{3} \times 10^{-1}$$

.

c. $p = 0.3000 \times 10^4$ dan $p = 0.3100 \times 10^4$, kesalahan mutlaknya adalah

$$|p - p^*| = |0.3000 \times 10^4 - 0.3100 \times 10^4| = 0.1 \times 10^3$$

dan kesalahan relatifnya adalah

$$\frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|0.1 \times 10^3|}{|0.3000 \times 10^4|} = 0.333\bar{3} \times 10^{-1}$$

.

Contoh ini menunjukkan bahwa kesalahan relatif yang sama, $0.333\bar{3} \times 10^{-1}$, sedangkan kesalahan mutlak bervariasi. Sebagai ukuran akurasi, kesalahan mutlak dapat menyesatkan dan kesalahan relatif lebih bermakna, karena kesalahan relatif mempertimbangkan ukuran dari nilai. ◀

Definisi berikut menggunakan kesalahan relatif untuk memberikan ukuran digit signifikan akurasi untuk penaksiran.

DEFINISI 1.1.16 *Bilangan p^* dikatakan mendekati p sampai dengan t angka penting dan jika t adalah yang bilangan terbesar bulat non-negatif, yang*

$$\frac{|p - p^*|}{|p|} \leq 5 \times 10^{-t}$$

Tabel 1.1: Ilustrasi digit signifikan

p	$max\|p - p^*\|$
0.1	0.00005
0.5	0.00025
100	0.05
1000	0.5
5000	2.5
9990	4.995
10000	5

Tabel 1.1 mengilustrasikan sifat berkelanjutan dari angka-angka penting dengan daftar, untuk berbagai nilai p, batas atas terkecil $|p - p^*|$, dinotasikan $max|p - p^*|$, ketika p^* sesuai dengan p hingga empat angka penting.

Kembali ke representasi mesin bilangan, untuk melihat bahwa floating-point representasi $fl(y)$ untuk bilangan y memiliki kesalahan relatif

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right|$$

Jika k digit desimal dan pemotongan digunakan untuk merepresentasikan dari

$$y = 0.d_1d_2d_3 \dots d_kd_{k+1} \cdots \times 10^n$$

maka

$$\begin{aligned}
\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| &= \left|\frac{0.d_1d_2d_3 \dots d_kd_{k+1} \cdots \times 10^n - 0.d_1d_2d_3 \dots d_k \cdots \times 10^n}{0.d_1d_2d_3 \dots d_kd_{k+1} \cdots \times 10^n}\right| \\
&= \left|\frac{0.d_{k+1}d_{k+2} \cdots \times 10^{n-k}}{0.d_1d_2d_3 \dots d_kd_{k+1} \cdots \times 10^n}\right| \\
&= \left|\frac{0.d_{k+1}d_{k+2} \dots}{0.d_1d_2d_3 \dots}\right| \times 10^{-k}
\end{aligned}$$

Karena $d_1 \neq 0$, nilai minimal penyebut adalah 0.1 dan pembilang mempunyai batas atas 1, sehingga

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| = \frac{1}{0.1} \times 10^{-k} = 10^{-k+1}$$

Dengan cara yang sama, batas untuk kesalahan relatif saat menggunakan aritmatik pembulatan k-digit adalah $0.5 \times 10^{-k+1}$.

Terbatas-Digit Aritmatika

Selain representasi bilangan yang tidak akurat, aritmatika yang dilakukan didalam komputer juga tidak tepat. Aritmatika melibatkan manipulasi digit binary dengan berbagai pergeseran operasi. Karena mekanisme sebenarnya dari operasi ini tidak berhubungan dengan presentasi, akan dicoba untuk menyusun pendekatan ke aritmatika komputer. Meskipun aritmatika tidak akan memberikan gambaran yang tepat, itu sudah cukup untuk menjelaskan masalah yang terjadi.

Diasumsikan bahwa representasi floating-point $fl(x)$ dan $fl(y)$ diberikan untuk bilangan real x dan y dan simbol $\oplus$, $\ominus$, $\otimes$ dan $\oslash$ merepresentasikan penambahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian mesin. Operasi tersebut adalah

$$\begin{aligned} x \oplus y &= fl(fl(x) + fl(y)) \\ x \ominus y &= fl(fl(x) - fl(y)) \\ x \oplus y &= fl(fl(x) \times fl(y)) \\ x \oslash y &= fl(fl(x) \div fl(y)) \end{aligned}$$

Aritmatika ini sesuai untuk melakukan aritmatika yang tepat pada representasi floating-point x dan y dan kemudian mengkonversi hasil yang tepat ke floating-point.

Contoh 1.1.5 Andaikan $x = \frac{5}{7}$ dan $y = \frac{1}{3}$. Gunakan lima-digit pemotongan untuk menghitung $x + y$, $x - y$, $x \times y$, dan $x \div y$,

Penyelesaian
Sebagai catatan, bahwa

$$x = \frac{5}{7} = 0.\overline{714285} \quad \text{dan} \quad y = \frac{1}{3} = 0.\bar{3}$$

ini berarti pemotongan sampai lima-digit, maka nilai x dan y adalah

$$fl(x) = 0.71428 \times 10^0 \quad \text{dan} \quad fl(y) = 0.33333 \times 10^0$$

Jadi

$$\begin{aligned} x \oplus y &= fl(fl(x) + fl(y)) \\ &= fl(0.71428 \times 10^0 + 0.33333 \times 10^0) \\ &= fl(1.04761 \times 10^0) \\ &= 0.10476 \times 10^1 \end{aligned}$$

sedangkan nilai

$$x + y = \frac{5}{7} + \frac{1}{3} = \frac{22}{21}$$

sehingga kesalahan mutlaknya adalah

$$\left| \frac{22}{21} - 0.10476 \times 10^1 \right| = 0.190 \times 10^{-4}$$

dan kesalahan relatifnya adalah

$$\left| \frac{0.190 \times 10^{-4}}{22/21} \right| = 0.182 \times 10^{-4}$$

Untuk pengurangan, maka

$$\begin{aligned} x \ominus y &= fl(fl(x) - fl(y)) \\ &= fl(0.71428 \times 10^0 - 0.33333 \times 10^0) \\ &= fl(0.38095 \times 10^0) \\ &= 0.38095 \times 10^0 \end{aligned}$$

sedangkan nilai

$$x - y = \frac{5}{7} - \frac{1}{3} = \frac{8}{21}$$

sehingga kesalahan mutlaknya adalah

$$\left| \frac{8}{21} - 0.38095 \times 10^0 \right| = 0.238 \times 10^{-5}$$

dan kesalahan relatifnya adalah

$$\left| \frac{0.238 \times 10^{-5}}{8/21} \right| = 0.625 \times 10^{-5}$$

Untuk perkalian, maka

$$\begin{aligned} x \otimes y &= fl(fl(x) \times fl(y)) \\ &= fl(0.71428 \times 10^0 \times 0.33333 \times 10^0) \\ &= fl(0.23809 \times 10^0) \\ &= 0.23809 \times 10^0 \end{aligned}$$

sedangkan nilai

$$x \times y = \frac{5}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{21}$$

sehingga kesalahan mutlaknya adalah

$$\left| \frac{5}{21} - 0.23809 \times 10^0 \right| = 0.524 \times 10^{-5}$$

dan kesalahan relatifnya adalah

$$\left| \frac{0.524 \times 10^{-5}}{5/21} \right| = 0.220 \times 10^{-5}$$

Untuk pembagian, maka

$$\begin{aligned} x \oslash y &= fl(fl(x) \div fl(y)) \\ &= fl(0.71428 \times 10^0 \div 0.33333 \times 10^0) \\ &= fl(0.21428 \times 10^0) \\ &= 0.21428 \times 10^0 \end{aligned}$$

sedangkan nilai

$$x/y = \frac{5}{7}/\frac{1}{3} = \frac{5}{7} \times \frac{3}{1} = \frac{15}{7}$$

sehingga kesalahan mutlaknya adalah

$$\left| \frac{15}{7} - 0.21428 \times 10^0 \right| = 0.19286 \times 10^1$$

dan kesalahan relatifnya adalah

$$\left| \frac{0.19286 \times 10^1}{15/7} \right| = 0.9 \times 10^0$$

◄

CONTOH 1.1.6 Andaikan $p = 0.54617$ dan $q = 0.54601$. Gunakan empat-digit aritmatika untuk menaksir $p - q$ dan tentukan kesalahan mutlak dan kesalahan relatif dengan menggunakan

a. pemotongan

b. pembulatan

Penyelesaian

a. Dengan menggunakan metode pemotongan, karena $p = 0.54617$ dan $q = 0.54601$, maka $p^* = 0.5461$, $q^* = 0.5460$ dan $r = 0.00016$ serta $r^* = p^* - q^* = 0.0001$, sehingga kesalahan mutlaknya adalah

$$|r - r^*| = |0.00016 - 0.0001| = 0.00006$$

dan kesalahan relatifnya adalah

$$\frac{|r - r^*|}{|r|} = \frac{0.00006}{0.00016} = 0.375$$

b. Dengan menggunakan metode pembulatan, karena $p = 0.54617$ dan $q = 0.54601$, maka $p^* = 0.5462$, $q^* = 0.5460$ dan $r = 0.00016$ serta $r^* = p^* - q^* = 0.0002$, sehingga kesalahan mutlaknya adalah

$$|r - r^*| = |0.00016 - 0.0002| = 0.00004$$

dan kesalahan relatifnya adalah

$$\frac{|r - r^*|}{|r|} = \frac{0.00004}{0.00016} = 0.25$$

◀

Berkurangnya akurasi karena kesalahan pembulatan dapat dihindari dengan reformulasi perhitungan, seperti yang diilustrasikan pada contoh berikut.

CONTOH 1.1.7 Persamaan kuadrat yaitu $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a \neq 0$, mempunyai dua akar yaitu

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{dan} \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jika diketahui persamaan kuadrat $x^2 + 62.10x + 1 = 0$, maka akar dari persamaan tersebut adalah

$$x_1 = \frac{-62.10 + \sqrt{62.10^2 - 4(1)(1)}}{2} = -0.01610723$$

dan

$$x_2 = \frac{-62.10 - \sqrt{62.10^2 - 4(1)(1)}}{2} = -62.08390$$

Jika diinginkan pembulatan sampai empat digit saja, maka nilai dari diskriminan adalah

$$\begin{aligned}\sqrt{b^2-4ac} &= \sqrt{(62.10)^2-(4.000)(1.000)(1.000)}\\ &= \sqrt{3856.-4.000}\\ &= 62.06\end{aligned}$$

sehingga

$$fl(x_1)=\frac{-62.10+62.06}{2.000}=\frac{-0.0400}{2.000}=-0.0200$$

sedangkan penaksiran untuk $x_1=-0.01611$, maka kesalahan relatifnya adalah

$$\frac{|-0.0161+0.0200|}{|-0.0161|}\approx 2.4\times 10^{-1}$$

dan

$$fl(x_2)=\frac{-62.10-62.06}{2.000}=\frac{-124.2}{2.000}=-62.1$$

sedangkan penaksiran untuk $x_1=-0.01611$, maka kesalahan relatifnya adalah

$$\frac{|-62.08+62.10|}{|-62.08|}\approx 3.2\times 10^{-4}$$

lebih akurat dari pada kesalahan relatif untuk x_1. Untuk mendapatkan pendekatan pembulatan empat digit yang lebih akurat untuk x_1, ubahlah bentuk rumus kuadrat dengan merasionalisasi pembilang

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}\right)\\ &= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})}\\ &= \frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}\end{aligned}$$

dengan menggunakan rumus di atas, maka

$$fl(x_1)=\frac{-2.000}{62.10+62.06}=\frac{-2.000}{124.2}=-0.01610$$

dengan kesalahan relatif adalah 6.2×10^{-4}, lebih akurat dari sebelumnya. ◀

Untuk lebih memahami materi yang telah diuraikan di atas, perhatikan contoh soal berikut ini!

Contoh 1.1.8 Temukan polinomial Taylor order tiga dari $f(x)=\sqrt{x+1}$ dengan $x_0=0$. Taksirlah $\sqrt{1.25}$.

Penyelesaian
Diketahui $F \in C^{\infty}(R)$, teorema Taylor dapat digunakan untuk $n \geq 0$, juga

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} \\
f''(x) &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)(x+1)^{-\frac{3}{2}} \\
f'''(x) &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(x+1)^{-\frac{5}{2}} \\
f^{(4)}(x) &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)(x+1)^{-\frac{7}{2}} \\
f^{(5)}(x) &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)(x+1)^{-\frac{9}{2}}
\end{aligned}
$$

sedemikian hingga

$$
\begin{aligned}
f(0) &= (0+1)^{\frac{1}{2}} = 1 \\
f'(0) &= \frac{1}{2}(0+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \\
f''(0) &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)(0+1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \\
f'''(0) &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(0+1)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8} \\
f^{(4)}(0) &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(-\frac{5}{2})(0+1)^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16} \\
f^{(5)}(0) &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)(0+1)^{-\frac{9}{2}} = \frac{105}{32}
\end{aligned}
$$

untuk $n = 3$ dan x_0, maka polinomial Taylor untuk $\sqrt{x+1}$, adalah

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x+1} &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^4(\xi(x))}{4!}x^4 \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2!} + \frac{3}{8}\frac{x^3}{3!} - \frac{15}{16}\frac{1}{4!}f(\xi) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{48}x^3 - \frac{15}{16}(\xi(x)+1)^{-\frac{7}{2}}
\end{aligned}
$$

dan untuk $x = 0.25$, maka

$$
\begin{aligned}
\sqrt{0.25+1} &= 1 + \frac{1}{2}0.25 - \frac{1}{4}\frac{0.25^2}{2!} + \frac{3}{8}\frac{0.25^3}{3!} - \frac{15}{16}\frac{1}{4!}f(\xi) \\
&= 1.118164 - \frac{15}{16}\frac{1}{4!}f(\xi)
\end{aligned}
$$

◀

Contoh 1.1.9 Hitung kesalahan mutlak dan kesalahan relatif dari (**a**) $p = \sqrt{2}$ dan $p^* = 1.414$, (**b**) $p = e$ dan $p^* = 2.718$

Penyelesaian
Diketahui $p = \sqrt{2}$ dan $p^* = 1.414$, kesalahan mutlaknya adalah

$$|p - p^*| = |1.4142 - 1.414| = 0.0002 = 2 \times 10^{-4}$$

dan kesalahan relatifnya adalah

$$\frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|1.4142 - 1.414|}{|1.4142|} = 0.0001 = 1 \times 10^{-4}$$

Sedangkan untuk $p = e$ dan $p^* = 2.718$, kesalahan mutlaknya adalah

$$|p - p^*| = |2.7183 - 2.718| = 0.0003 = 3 \times 10^{-4}$$

dan kesalahan relatifnya adalah

$$\frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|2.7183 - 2.718|}{|2,7183|} = \frac{0.0003}{2.7183} = 0.0001 \times 10^{-4}$$

◀

Galat atau error atau kesalahan pada suatu perhitungan numerik adalah selisih antara nilai yang sebenarnya dengan nilai pendekatan (hasil dari perhitungan). Galat pembulatan adalah galat yang disebabkan oleh terbatas digit yang dikehendaki. Galat pembulatan terdiri dari dua cara yaitu *chopping* dan *rounding*. Selain itu ada galat yang disebabkan oleh pemenggalan suku-suku dalam suatu deret.

SOAL-SOAL LATIHAN 1.1

Kerjakan soal-soal berikut ini untuk mengukur tingkat penguasaan Anda atas bahasan yang telah Anda pelajari.

π adalah bilangan irrasional, dan $\pi = 3.14159265358979\ldots$,

1. Jika dilakukan pembulatan sampai tiga digit, berapa nilai taksiran π
2. Jika dilakukan pemotongan sampai empat digit, maka berapa nilai taksiran π
3. Berapa kesalahan mutlak, jika dilakukan pembulatan sampai empat digit.
4. Berapa kesalahan mutlak, jika dilakukan pemotongan sampai empat digit.
5. Berapa kesalahan relatif, jika dilakukan pembulatan sampai empat digit.

e adalah bilangan natural, dan $e = 2.7182818284590 50\ldots$,

6. Jika dilakukan pembulatan sampai tiga digit, berapa nilai taksiran e
7. Jika dilakukan pemotongan sampai empat digit, maka berapa nilai taksiran π
8. Berapa kesalahan mutlak, jika dilakukan pembulatan sampai empat digit.
9. Berapa kesalahan mutlak, jika dilakukan pemotongan sampai empat digit.
10. Berapa kesalahan relatif, jika dilakukan pembulatan sampai empat digit.

1.2 Algoritma dan Konvergensi

Algoritma adalah urutan langkah-langkah yang logis yang disusun secara sistematis untuk menyelesaikan suatu masalah. Setiap langkah dalam algoritma harus logis dan hasilnya harus bernilai benar atau salah.

Algoritma biasanya ditulis dalam bentuk pseudocode. Pseudocode ini menentukan bentuk dari masukan atau *input* yang akan diberikan dan bentuk luaran atau *output* yang diinginkan. Tidak semua prosedur numerik memberikan hasil yang memuaskan untuk input yang dipilih. Akibatnya, diperlukan teknik untuk berhenti dari teknik numerik dimasukkan ke dalam setiap algoritma untuk menghindari tak terbatas iterasi.

Dua notasi tanda baca digunakan dalam algoritma, yaitu

1. titik (.), menunjukkan penghentian langkah, dan

2. titik koma (;), memisahkan perintah dalam satu langkah

Teknik iterasi atau putaran (*looping*) dalam algoritma adalah dengan dikontrol perhitungan dengan cara

$$\begin{aligned} For \;\; i &= 1, 2, \cdots n \\ Set \;\; x_i &= a + i \cdot h \end{aligned}$$

atau dengan kontrol kondisi, seperti

$$While \;\; i < N \;\; do \;\; Steps \;\; 3 \div 6$$

serta memungkinkan pelaksanaan bersyarat, seperti

$$If \ldots then \ldots \qquad \text{atau} \qquad If \ldots then \ldots else \ldots$$

Contoh 1.2.1 Tuliskan sebuah algoritma untuk menghitung

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_N = \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Penyelesaian

Untuk menuliskan algoritma tersebut, inputnya adalah banyaknya bilangan yaitu N dan bilangan yang dimaksud, yaitu x_1, x_2, ..., x_n.

INPUT: N, x_1, x_2, ..., x_n
OUTPUT: $Sum = \sum_{i=1}^{N} x_i$

1. Set $Sum = 0$.

2. For $i = 1, 2, \ldots, N$ do
   set $Sum = Sum + x_i$

3. OUTPUT (Sum);
   STOP.

◀

CONTOH 1.2.2 Tuliskan sebuah algoritma untuk menghitung polinomial Taylor dari $f(x) = \ln x$ yang diekspansi ke $x_0 = 1$, yaitu

$$P_N(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(-1)^{i+1}}{i}(x-1)^i$$

dan nilai dari $\ln 1.5 = 0.40546511$ (delapan digit desimal). Konstruksikan sebuah algoritma untuk menentukan nilai minimal N yang diperlukan untuk

$$|\ln 1.5 - P_N(1.5)| < 10^{-5}$$

tanpa menggunakan sisa polinomial Taylor.

Penyelesaian
Menurut kalkulus khususnya deret bahwa jika

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

adalah deret dengan penurunan nilai, maka A dan N^{th} jumlah parsial

$$\sum_{n=1}^{N} a_n$$

yang nilainya kurang dari waktu ke $(N+1)^{st}$ adalah

$$|A - A_N| \le |a_{N+1}|$$

Perhatikan algoritma berikut menggunakan batasan ini.

INPUT: nilai x, toleransi TOL, bilangan terbesar untuk iterasi M
OUTPUT: order N dari polinomial atau pesan gagal

1. Set $N = 1$;
   $y = x - 1$;
   $SUM = 0$;
   $Power = y$;
   $Term = y$;
   $Sign = -1$.

2. While $N \le M$ do 3-5

3. Set $Sign = -Sign$;
   $Sum = Sum + Sign \cdot Term$;
   $Power = Power \cdot y$;
   $Term = Power/(N+1)$.

4. If $|Term| < Tol$ then
   OUTPUT(N);
   STOP.

5. Set $N = N + 1$

6. OUTPUT('Metode Gagal');
   STOP.

◀

Masukan atau input pada permasalahan ini adalah $x = 1.5$, $TOL = 10^{-5}$, dan $M = 15$. Pilihan M memberikan batas atas untuk jumlah perhitungan yang dilakukan, algoritma kemungkinan akan gagal jika batas ini terlampaui. Apakah hasilnya adalah nilai untuk N atau pesan kegagalan tergantung pada ketepatan komputasi.

Perlu mempertimbangkan berbagai masalah penaksiran dan setiap kejadian untuk menentukan metode pendekatan yang mendapatkan hasil yang akurasinya dapat diandalkan. Oleh karena itu, banyak cara yang berbeda untuk mendapat nilai aproksimasi yang diinginkan. Tidak semua kondisi akan sesuai untuk permasalahan tertentu.

Satu kriteria yang akan diterapkan pada algoritma bila memungkinkan adalah perubahan kecil dalam data awal yang menghasilkan perubahan kecil pada hasil akhir. Suatu algoritma yang memenuhi sifat ini disebut stabil; jika tidak, itu tidak stabil. Beberapa algoritma stabil hanya untuk pilihan data awal tertentu, dan disebut stabil secara kondisional.

Perlu dipertimbangkan permasalahan pertumbuhan kesalahan round-off dan hubungannya dengan stabilitas algoritma, misalkan kesalahan dengan besarnya $E_0 > 0$ diperkenalkan pada beberapa tahap dalam perhitungan dan bahwa besarnya kesalahan setelah n operasi berikutnya dilambangkan oleh E_n. Dua kasus yang paling sering muncul dalam praktik didefinisikan sebagai berikut.

DEFINISI 1.2.1 *Misalkan $E_0 > 0$ menunjukkan kesalahan yang diperkenalkan pada tahap tertentu dalam perhitungan dan E_n mewakili besarnya kesalahan setelah n operasi berikutnya.*

1. *Jika $E_n \approx CnE_0$, di mana C adalah konstanta dari n, maka pertumbuhan kesalahannya adalah dikatakan linear.*

2. *Jika $E_n \approx C^n E_0$, untuk beberapa $C > 1$, maka pertumbuhan kesalahan disebut eksponensial.*

Sebagai ilustrasi, untuk konstanta c_1 dan c_2, maka

$$p_n = c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^n + c_2 3^n$$

dan solusi persamaan rekursif adalah

$$p_n = \frac{10}{3} p_{n-1} - p_{n-2}, \qquad \text{untuk } n = 2, 3, \ldots$$

bukti

$$\begin{aligned}
\frac{10}{3}p_{n-1} - p_{n-2} &= \frac{10}{3}\left[c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + c_2 3^{n-1}\right] - \left[c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + c_2 3^{n-2}\right] \\
&= c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left[\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{3} - 1\right] + c_2 3^{n-2}\left[\frac{10}{3}\cdot 3 - 1\right] \\
&= c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\frac{1}{9} + c_2 3^{n-2} 9 \\
&= c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n} + c_2 3^n = p_n
\end{aligned}$$

Andaikan diberikan $p_0 = 1$ dan $p_1 = \frac{1}{3}$. Nilai unik akan ditemukan untuk konstanta $c_1 = 1$ dan $c_2 = 0$, maka $p_n = (\frac{1}{3})^n$ untuk semua n.

Tabel 1.2: Pertumbuhan Kesalahan

n	$\hat{p}_n$	p_n	Kesalahan Relatif
0	0.10000×10^1	0.10000×10^1	
1	0.33333×10^0	0.33333×10^0	
2	0.11110×10^0	0.11111×10^0	9×10^{-5}
3	0.37000×10^{-1}	0.37037×10^{-1}	1×10^{-3}
4	0.12230×10^{-1}	0.12346×10^{-1}	9×10^{-3}
5	0.37660×10^{-2}	0.41152×10^{-2}	8×10^{-2}
6	0.32300×10^{-3}	0.13717×10^{-2}	8×10^{-1}
7	-0.26893×10^{-2}	0.45725×10^{-3}	7×10^0
8	-0.92872×10^{-2}	0.15242×10^{-3}	6×10^1

Jika diinginkan pembulatan sampai lima digit, maka $\hat{p}_0 = 1.0000$ dan $\hat{p}_1 = 0.3333$, perlu memodifikasi konstanta menjadi $\hat{c}_1 = 1.0000$ dan $\hat{c}_2 = -0.12500 \times 10^{-5}$, sehingga

$$\hat{p}_n = 1.0000\left(\frac{1}{3}\right)^n - 0.12500 \times 10^{-5}(3)^n$$

dengan kesalahan pembulatan, adalah

$$p_n - \hat{p}_n = 1.12500 \times 106{-}5(3^n)$$

Prosedur ini tidak stabil karena pertumbuhan kesalahan secara eksponensial dengan n, seperti yang ditunjukkan pada Tabel 1.2.

Sekarang perhatikan persamaan rekursif di bawah ini

$$p_n = 2p_{n-1} - p_{n-2}, \qquad \text{untuk } n = 2, 3, \ldots$$

Ini mempunyai solusi $p_n = c_1 + c_2 n$ untuk konstanta c_1 dan c_2, sebab

$$\begin{aligned}
2p_{n-1} - p_{n-2} &= 2(c_1 + c_2(n-1)) - (c_1 + c_2(n-2)) \\
&= c_1(2-1) + c_2(2n - 2 - n + 2) \\
&= c_1 + c_2 n = p_n
\end{aligned}$$

Jika diberikan $p_0 = 1$ dan $p_1 = \frac{1}{3}$, maka konstanta dalam persamaan ini ditentukan secara unik menjadi $c_1 = 1$ dan $c_2 = -\frac{2}{3}$. Ini menyiratkan bahwa $p_n = 1 - \frac{2}{3}n$.

Tabel 1.3: Pertumbuhan Kesalahan

n	$\hat{p}_n$	p_n	Error Relatif
0	0.10000×10^1	0.10000×10^1	
1	0.33333×10^0	0.33333×10^0	
2	-0.33330×10^0	-0.33333×10^0	9×10^{-5}
3	-0.10000×10^1	-0.10000×10^1	0
4	-0.16667×10^1	-0.16667×10^1	0
5	-0.23334×10^1	-0.23333×10^1	4×10^{-5}
6	-0.30000×10^1	-0.30000×10^1	80
7	-0.36667×10^1	-0.36667×10^1	0
8	-0.43334×10^1	-0.43333×10^1	2×10^{-5}

Jika aritmatik pembulatan lima digit digunakan untuk menghitung ketentuan dari deret yang diberikan oleh persamaan, lalu $\hat{p}_0 = 1.0000$ dan $\hat{p}_1 = 0.33333$. Sebagai akibatnya, pembulatan lima digit konstanta adalah $\hat{c}_1 = 1.0000$ dan $\hat{c}_2 = -0.66667$. Dengan demikian

$$\hat{p}_n = 1.0000 - 0.66667n$$

yang mempunyai kesalahan pembulatan sebesar

$$p_n - \hat{p}_n = \left(0.66667 - \frac{2}{3}\right)n$$

Prosedur ini stabil karena pertumbuhan kesalahan secara linear dengan n, yang direfleksikan dalam aproksimasi yang ditunjukkan pada Tabel 1.3.

Tingkat Konvergensi

Teknik iterasi meliputi deretan perintah yang sering dilakukan, pada bagian ini akan didiskusikan secara singkat tentang terminologi tingkat konvergensi yang terjadi. Perhatikan definisi berikut ini.

DEFINISI 1.2.2 *Diberikan*

$$\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$$

adalah deret yang konvergen ke 0, dan

$$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$$

deret yang konvergen ke α. Jika ada konstanta positif K dengan

$$|\alpha_n - \alpha| \le K|\beta_n|, \qquad \text{untuk } n \text{ yang besar}$$

maka deret

$$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$$

konvergen ke α, dengan tingkat konvergensi $O(\beta_n)$. Ini ditunjukan dengan

$$\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$$

.

Meskipun Definisi 1.2.2 memungkinkan $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ dibandingkan dengan deret

$\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$, di setiap situasi digunakan

$$\beta_n = \frac{1}{n^p}$$

untuk $p > 0$. Untuk p yang besar dengan $\alpha_n = \alpha + O(1/n^p)$.

Contoh 1.2.3 Untuk $n \geq 1$, diberikan

$$\alpha_n = \frac{n+1}{n^2} \qquad \text{dan} \qquad \widehat{\alpha}_n = \frac{n+3}{n^3}$$

keduanya mempunyai

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \qquad \text{dan} \qquad \lim_{n\to\infty} \widehat{\alpha}_n = 0,$$

tetapi deret $\{\widehat{\alpha}_n\}$ konvergen ke suatu titik lebih cepat dari pada $\{\alpha_n\}$. Dengan menggunakan pembulatan lima-digit dapat dilihat pada Tabel 1.4.

Tabel 1.4

n	1	2	3	4	5	6	7
α_n	2.00000	0.75000	0.44444	0.31250	0.24000	0.19444	0.16327
$\widehat{\alpha}_n$	4.00000	0.62500	0.22222	0.10938	0.064000	0.041667	0.029155

Penyelesaian

Didefinisikan deret

$$\beta_n = \frac{1}{n} \qquad \text{dan} \qquad \widehat{\beta}_n = \frac{1}{n^2},$$

maka

$$|\alpha_n - 0| = \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{n+n}{n^2} = 2 \cdot \frac{1}{n} = 2\beta_n$$

dan

$$|\widehat{\alpha}_n - 0| = \frac{n+3}{n^2} \leq \frac{n+3n}{n^2} = 4 \cdot \frac{1}{n^2} = 4\widehat{\beta}_n$$

Konvergensi dari $\{\alpha_n\}$ ke nol sama seperti konvergensi dari $\{1/n\}$ ke nol,

Oleh karena itu, tingkat konvergensi $\{\alpha_n\}$ ke nol mirip dengan konvergensi $\{1/n\}$ ke nol, sedangkan $\{\widehat{\alpha}_n\}$ konvergen ke nol pada tingkat yang sama dengan deret yang konvergensi yang lebih cepat $\{1/n^2\}$, dapat ditulis

$$\alpha_n = 0 + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{dan} \quad \widehat{\alpha}_n = 0 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Digunakan notasi O(*big oh*) untuk menggambarkan tingkat konvergensi fungsi. ◀

Definisi 1.2.3 *Andaikan*

$$\lim_{h\to 0} G(h) = 0 \qquad \textit{dan} \qquad \lim_{h\to 0} F(h) = L.$$

Jika K konstanta positif dengan

$$|F(h) - L| \leq K|G(h)|, \qquad \textit{untuk } h \textit{ cukup kecil}$$

maka ditulis $F(h) = L + O(G(h))$

Fungsi yang digunakan untuk membandingkan umumnya memiliki bentuk $G(h) = h^p$, dengan $p > 0$. Untuk nilai p terbesar berlaku $F(h) = L + O(h^p)$.

CONTOH 1.2.4 Dengan menggunakan polinomial Taylor order tiga dengan $h = 0$, tunjukkan bahwa $\cos h + \frac{1}{2}h^2 = 1 + O(h^4)$

Penyelesaian
Seperti contoh di atas, bahwa

$$\cos h = 1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{24}h^4 \cos\xi(h)$$

untuk bilangan $\xi(h)$ antara nol dan h, sehingga

$$\cos h + \frac{1}{2}h^2 = 1 + \frac{1}{24}h^4 \cos\xi(h)$$

oleh karena itu

$$\left|\left(\cos h + \frac{1}{2}h^2\right) - 1\right| = \left|\frac{1}{24}\cos\xi(h)\right| h^4 \leq \frac{1}{24}h^4$$

untuk $h \to 0$, $\cos h + \frac{1}{2}h^2$ konvergen ke 1, lebih cepat h^4 yang konvergen ke 0. Jadi

$$\cos h + \frac{1}{2}h^2 = 1 + O(h^4)$$

◀

Untuk lebih memahami materi yang telah diuraikan di atas, perhatikan beberapa contoh berikut.

CONTOH 1.2.5 Carilah tingkat konvergensi dari deret $\{\alpha_n\}_n^\infty = 1$ dengan

$$\alpha_n = \frac{n+1}{n+2}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Penyelesaian

Hitung dahulu konvergensi dari deret tersebut, yaitu

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \alpha_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2}\frac{1/n}{1/n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{1+2/n} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty}(1+1/n)}{\lim_{n\to\infty}(1+2/n)} \\
&= \frac{1+\lim_{n\to\infty}(1/n)}{1+\lim_{n\to\infty}(2/n)} \\
&= \frac{1+0}{1+0} = 1
\end{aligned}$$

Jadi deret $\{\alpha_n\}_n = 1^\infty$ konvergen ke $\alpha = 1$. Untuk menentukan tingkat konvergensi, yaitu

$$\alpha_n - \alpha = \frac{n+1}{n+2} - 1 = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n+2}{n+2} = \frac{-1}{n+2}$$

dan

$$\left|\frac{-1}{n+2}\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right|$$

oleh karena itu tingkat konvergensi dari deret tersebut adalah

$$\alpha_n = \alpha + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

dan tingkat konvergensinya adalah linear. ◀

CONTOH 1.2.6 Carilah tingkat konvergensi dari deret $\{\alpha_n\}_n^\infty = 1$ dengan

$$\alpha_n = \frac{2n^2+4n}{n^2+2n+1}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Penyelesaian

Lakukan sama seperti nomor sebelumnya, hitung nilai konvergensi dari deret tersebut, yaitu

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \alpha_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+4n}{n^2+2n+1}\frac{1/n^2}{1/n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2+4/n}{1+2/n+1/n^2} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2+4/n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+2/n+1/n^2)} \\
&= \frac{2+\lim\limits_{n\to\infty}(4/n)}{1+\lim\limits_{n\to\infty}(2/n+1/n^2)} \\
&= \frac{2+0}{1+0} = 2
\end{aligned}$$

Jadi deret $\{\alpha_n\}_n = 1^\infty$ konvergen ke $\alpha = 2$. Untuk menentukan tingkat konvergensi, yaitu

$$\alpha_n - \alpha = \frac{2n^2+4n}{n^2+2n+1} - 2 = \frac{2n^2+4n}{n^2+2n+1} - \frac{2n^2+4n+2}{n^2+2n+1} = \frac{-2}{n^2+2n+1}$$

dan

$$\left|\frac{-2}{n^2+2n+1}\right| \leq \left|\frac{2}{(n_1)^2}\right| \leq \left|\frac{2}{n^2}\right|$$

untuk n positif integer, oleh karena itu tingkat konvergensi dari deret tersebut adalah

$$\alpha_n = \alpha + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

◀

Contoh 1.2.7 Berapa tingkat konvergensi dari fungsi $f(h) = 1 + 2h$

Penyelesaian

Fungsi $f(h) = 1 + 2h$ kontinu untuk semua h, untuk $h \to 0$,

$$\lim_{h \to o} f(h) = f(0) = 1$$

dan

$$f(h) - f_0 = (1 + 2h) - 1 = 2h = O(h)$$

Jadi, untuk $h \to 0$, $f(h)$ konvergen ke 1 sehingga tingkat konvergensi adalah $O(h)$.

Fungsi $f(h) = 1 + 4h + 2h^2$ kontinu untuk semua h, untuk $h \to 0$,

$$\lim_{h \to o} f(h) = f(0) = 1$$

dan

$$f(h) - f_0 = (1 + 4h + 2h^2) - 1 = 4h + 2h^2$$

Untuk menentukan tingkat konvergensi dengan $h \to 0$, untuk h di di dalam $[-1, 1]$, oleh karena di dalam selang itu, maka $|h^2| \leq |h|$, sehingga

$$\begin{aligned} |4h + 2h^2| &\leq |4h| + |2h^2| \\ &\leq |4h| + |2h| \\ &\leq 6|h| \end{aligned}$$

Jadi, untuk $h \to 0$, $f(h)$ konvergen ke 1 sehingga tingkat konvergensi adalah $O(h)$. ◀

Algoritma biasanya ditulis dalam bentuk pseudocode. Pseudocode ini menentukan bentuk dari masukan atau *input* yang akan diberikan dan bentuk luaran atau *output* yang diinginkan. Tidak semua prosedur numerik memberikan hasil yang memuaskan untuk input yang dipilih. Akibatnya, diperlukan teknik untuk berhenti dari teknik numerik dimasukkan ke dalam setiap algoritma untuk menghindari tak terbatas iterasi.

Dua notasi tanda baca digunakan dalam algoritma, yaitu titik (.), yang menunjukkan penghentian langkah, dan titik koma (;), yang memisahkan perintah dalam satu langkah.

Teknik iterasi atau putaran (*looping*) dalam algoritma adalah dengan dikontrol perhitungan dengan cara

$$For \quad i = 1, 2, \ldots n$$

atau dengan kontrol kondisi, seperti

$$While \quad i < N \quad do \quad Steps \quad 3 - 6$$

serta memungkinkan pelaksanaan bersyarat, seperti

$$If \ldots then \qquad \text{atau} \qquad If \ldots then \ldots else$$

Jika diberikan $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah deret yang konvergen ke nol, dan $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ deret yang konvergen ke α. Jika ada konstanta positif K dengan

$$|\alpha_n - \alpha| \leq K|\beta_n|, \qquad \text{untuk } n \text{ yang besar}$$

maka deret $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke α, dengan tingkat konvergensi $O(\beta_n)$. Ini ditunjukan dengan $\alpha_n = \alpha + O(\beta_n)$.

SOAL-SOAL LATIHAN 1.2

Kerjakan soal-soal berikut ini untuk mengukur tingkat penguasaan atas bahasan yang telah pelajari.

Diberikan algoritma berikut ini
INPUT: N, x_1, x_2, $\ldots$, x_n
OUTPUT: $Sum = \sum_{i=1}^{N} x_i$

1. Set $Sum = 0$.
2. For $i = 1, 2, \ldots, N$ do
   set $Sum = Sum + x_i$
3. OUTPUT (Sum);
   STOP.

Jika diketahui $N = 10$ dan datanya adalah $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ adalah $(1, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 12, 14, 15)$

1. Jika menggunakan algoritma di atas berapa nilai $SUM = \ldots$?
2. Jika pada saat $i = 7$ pada 2 berapa nilai $SUM = \ldots$?
3. Jika pada 1 diganti $SUM = 99$ dan pada 2 diganti $Sum = Sum - x_i$ berapa nilai $SUM = \ldots$?
4. Jika pada 2 diganti $For\ i = N, N-1, \ldots, 3$, berapa nilai $SUM = \ldots$?
5. Jika pada 2 diganti $Sum = Sum \times x_i$, berapa nilai $SUM = \ldots$, pada saat $i = 5$.

Untuk Soal berikutnya, diketahui $N = 10$ dan datanya adalah $(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ adalah $(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19)$

6. Jika menggunakan algoritma di atas berapa nilai $SUM = \ldots$?
7. Jika pada saat $i = 7$ pada 2 berapa nilai $SUM = \ldots$?
8. Jika pada 1 diganti $SUM = 199$ dan pada 2 diganti $Sum = Sum - x_i$ berapa nilai $SUM = \ldots$?
9. Jika pada 2 diganti $For\ i = N, N-1, \ldots, 3$, berapa nilai $SUM = \ldots$?
10. Jika pada 2 diganti $Sum = Sum \times x_i$, berapa nilai $SUM = \ldots$, pada saat $i = 5$

Bab 2

Akar Persamaan

Akar dari persamaan kuadrat yang berbentuk

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

akan mempunyai dua akar persamaan. Salah rumus untuk mendapatkan akar dari persamaan tersebut adalah rumus ABC, yaitu

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{dan} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sedangkan, tidak semua permasalahan selalu berbentuk persamaan kuadrat, bisa jadi persamaannya berbentuk polinomial tingkat n, atau berbentuk eksponensial atau yang lainnya.

Salah satu contoh permasalahan, pertumbuhan populasi sering kali mempunyai model dalam waktu periode pendek yang diasumsikan bahwa pertumbuhan populasi berjalan secara kontinu dengan rata-rata pertumbuhan yang proporsional. Andaikan $N(t)$ adalah jumlah populasi burung pada saat t dan λ menyatakan konstanta populasi, maka populasi memenuhi persamaan

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)$$

yang mempunyai solusi

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t}$$

dengan N_0 merupakan inisial awal populasi burung tersebut.

Model eksponensial tersebut benar, ketika populasi burung tersebut terisolasi, artinya tidak terjadi imigrasi. Jika terjadi imigrasi dengan sebesar v, maka persamaan di atas menjadi

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) + v$$

dengan solusinya adalah

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{v}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)$$

Andaikan populasi awal $N(0) = 1.000.000$ burung dan burung yang melakukan imigrasi sebesar 435.000 dan akan kembali ke komunitasnya di tahun berikutnya, maka jumlah komunitas burung di tahun pertama menjadi $N(1) = 1.564.000$ burung. Untuk menentukan jumlah rata-rata populasi burung, perlu ditemukan λ pada persamaan

$$1.564.000 = 1.000.000e^{\lambda} + \frac{435.000}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$$

Hal ini tidak mungkin diselesaikan secara eksplisit untuk λ pada persamaan di atas, tetapi dapat diselesaikan dengan metode numerik dan dengan solusi pendekatan.

Pada buku ini akan dicari masalah dasar dari suatu pendekatan numerik untuk menemukan akar dari suatu persamaan. Proses menemukan akar persamaan atau solusi dari fungsi f yaitu persamaan $f(x) = 0$. Beberapa metode akan dibahas untuk menemukan akar dari suatu persamaan. Dua metode pokok untuk mencari akar dari persamaan, yaitu metode tertutup dan metode terbuka.

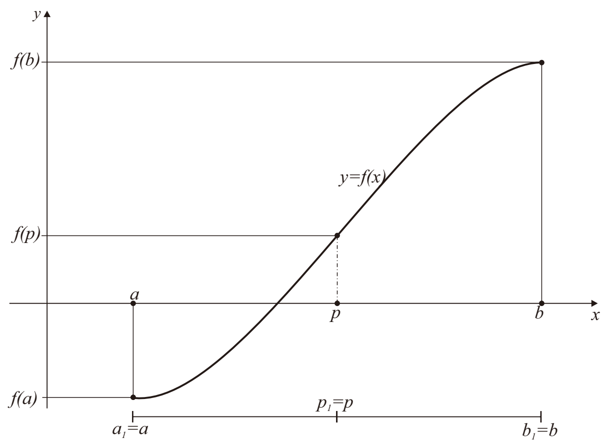
2.1 Metode Tertutup

Pada bagian ini diperkenalkan mencari akar dengan metode tertutup, dikatakan metode tertutup karena menggunakan dua batasan, sehingga akar terletak diantara batasan itu. Metode ini dikembangkan berdasarkan teorema di Kalkulus, yaitu

Teorema 2.1.1 *Jika $\{a_n\}$ dan $\{c_n\}$ masing-masing konvergen ke L dan $a_n \leq b_n \leq c_n$ untuk $n \geq K$ (K bilangan bulat tertentu) maka $\{b_n\}$ juga konvergen ke L.*

Metode tertutup menggunakan dua batasan yaitu batasan awal dan batasan akhir. Andaikan f fungsi kontinu pada selang $[a, b]$, dengan $f(a)$ dan $f(b)$ mempunyai tanda yang berbeda, dan ada titik p berada diantara titik a dan titik b atau memenuhi $a \leq p \leq b$ dengan $f(p) = 0$, meskipun diantara kedua titik a dan b ada banyak titik yang merupakan akar persamaan.

2.1.1 Metode Biseksi



Gambar 2.1: Pencarian Akar dengan Metode Biseksi

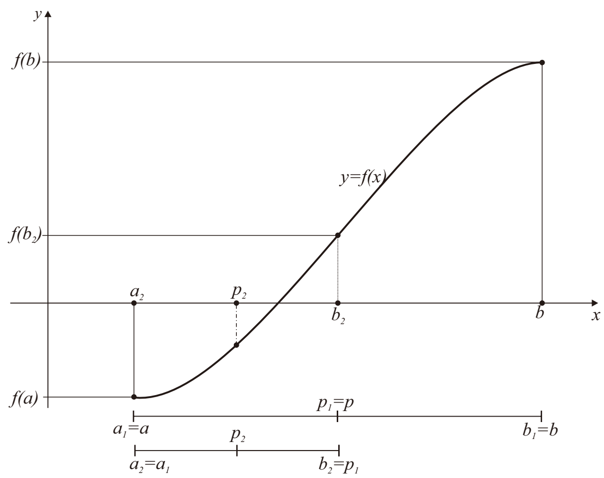
Dengan mengandaikan bahwa suatu fungsi f kontinu pada selang $[a, b]$ dan berlaku $f(a) \cdot f(b) < 0$, ada satu atau lebih titik diantara selang tersebut, misal titik c, maka berlaku $f(c) = 0$ dan c dinamakan akar persamaan dari $f(x)$. Metode Biseksi adalah metode pencarian akar persamaan dengan cara membagi dua bagian dari selang tersebut berulang kali sehingga ditemukan akar persamaan tersebut. Untuk memulai pencarian akar persamaan, tentukan $a_1 = a$ dan $b_1 = b$ (pastikan mempunyai tanda yang berbeda) dan p_1 terletak di-tengah selang $[a, b]$ seperti Gambar 2.1 , yaitu

$$p_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

.

- Jika $f(p_1) = 0$, maka $p = p_1$ dan selesai, akar persamaan ditemukan.
- Jika $f(p_1) \neq 0$, maka $f(p_1)$ mempunyai tanda yang **sama** dengan $f(a_1)$ atau $f(b_1)$.
  - Jika $f(p_1)$ mempunyai tanda yang **sama** dengan $f(a_1)$, hal ini mempunyai arti bahwa $p \in (p_1, b_1)$, maka tentukan $a_2 = p_1$ dan $b_2 = b_1$.
  - Jika $f(p_1)$ mempunyai tanda yang **tidak sama** dengan $f(a_1)$, hal ini mempunyai arti bahwa $p \in (a_1, p_1)$, maka tentukan $a_2 = a_1$ dan $b_2 = p_1$. Hal ini terjadi pada Gambar 2.2.

lakukan hal tersebut berulang kali sampai dengan $f(p_i) = 0$ atau mendekati. Untuk lebih memudahkan, perhatikan Algoritma Biseksi, di bawah ini.



Gambar 2.2: Pencarian Akar dengan Metode Biseksi

Algoritma Biseksi

Untuk menemukan akar persamaan dari $f(x) = 0$ dengan f kontinu pada selang $[a, b]$ dengan $f(a)$ dan $f(b)$ mempunyai tanda yang berlawanan.

INPUT: titik awal a dan b, toleransi TOL, putaran maksimal N_0.
OUTPUT: solusi pendekatan p atau pesan gagal.

Langkah-1 Tentukan $i = 1$;
$FA = f(a)$, $FB = f(b)$, pastikan $FA \cdot FB < 0$.
(misal $FA > 0$ dan $FB < 0$)

Langkah-2 While $i \leq N_0$ lakukan Langkah 3 sampai dengan Langkah 6

Langkah-3 Tentukan $p = a + (b - a)/2$ (Menghitung p_i) $FP = f(p)$

Langkah-4 If $FP = 0$ atau $(b - a)/2 < TOL$ then
OUTPUT(p). (Proses pencarian telah selesai dan ditemukan) STOP.

Langkah-5 Tentukan $i = i + 1$.

Langkah-6 If $FA \cdot FP > 0$
then tentukan $a = p$ (hitung a_i dan b_i) else tentukan $b = p$ (FA tidak berubah)

Langkah-7 OUTPUT ('Metode GAGAL setelah melalui iterasi $i = N_0$)
(Proses telah selesai tetapi tidak ditemukan)
STOP.

Proses bisa juga berhenti, seperti pada Algoritma di atas pada langkah ke-4, yaitu dengan memberikan nilai toleransi $\varepsilon > 0$ dan menghasilkan p_1, p_2, $\cdots$, p_N sampai dengan kondisi berikut terpenuhi

$$|p_N - p_{N-1}| < \varepsilon \tag{2.1}$$

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \varepsilon, p_N \neq 0, \text{atau} \tag{2.2}$$

$$|f(p_N)| < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Contoh 2.1.1 Dengan menggunakan metode Biseksi, tentukan salah satu akar real dari $f(x) = -2x^5 - 1.6x^3 + 12x + 1$ di dalam selang $[1, 2]$ dengan $\varepsilon = 10^{-5}$.

Penyelesaian

Diketahui $f(x)$ adalah fungsi kontinu dan selang dari akar adalah $a = 1$ dan $b = 2$ dan hitung $f(1) = 9.4$ dan $f(2) = -51.8$ terpenuhi untuk diselesaikan dengan metode Biseksi, karena $f(1) \cdot f(2) < 0$. Oleh karena itu hitung p_1 dengan $a_1 = a = 1$ dan $b_1 = b = 2$

$$p_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{1 + 2}{2} = 1.5$$

kemudian hitung $f(p_1) = f(1.5) = -1.5857$ mempunyai tanda minus yang sama dengan tanda $f(b_1)$, sehingga

$$a_2 = a_1 = 1 \quad \text{dan} \quad b_2 = p_1 = 1.5$$

sehingga $f(a_2) = f(1) = 9.4$ dan $f(b_2) = f(1.5) = -1.5857$, kemudian hitung p_2, yaitu

$$p_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{1 + 1.5}{2} = 1.25$$

dan hitung $f(p_3) = f(1.25) = 6.771484$ mempunyai tanda positif yang sama dengan tanda $f(a_2)$, sehingga

$$a_3 = p_2 = 1.25 \quad \text{dan} \quad b_3 = b_2 = 1.5$$

selanjutnya dapat dilihat pada Tabel 2.1 dengan $\varepsilon_1 = |p_N - p_{N-1}|$ dan $\varepsilon_2 = \frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|}$

Berdasarkan Tabel 2.1, terlihat bahwa akar dari persamaan $f(x) = -2x^5 - 1.6x^3 + 12x + 1$ adalah $p = 1.466194$ (pada iterasi ke-17) dengan $\varepsilon_1 < \varepsilon$ atau $\varepsilon_2 < \varepsilon$. ◀

Tabel 2.1: Pencarian akar persamaan dari $f(x) = -2x^5 - 1.6x^3 + 12x + 1$

n	a_N	b_N	p_N	$f(p_N)$	ε_1	ε_2
1	1.000000	2.000000	1.500000	-1.5875		
2	1.000000	1.500000	1.250000	6.771484	0.250000	0.2000000
3	1.250000	1.500000	1.375000	3.510852	0.125000	0.0909091
4	1.375000	1.500000	1.437500	1.220916	0.062500	0.0434783
5	1.437500	1.500000	1.468750	-0.114510	0.031250	0.0212766
6	1.437500	1.468750	1.453125	0.569889	0.015625	0.0107527
7	1.453125	1.468750	1.460938	0.231924	0.007813	0.0053476
8	1.460938	1.468750	1.464844	0.059773	0.003906	0.0026667
9	1.464844	1.468750	1.466797	-0.027101	0.001953	0.0013316
10	1.464844	1.466797	1.465820	0.016403	0.000977	0.0006662
11	1.465820	1.466797	1.466309	-0.005332	0.000488	0.0003330
12	1.465820	1.466309	1.466064	0.005540	0.000244	0.0001665
13	1.466064	1.466309	1.466187	0.000105	0.000122	0.0000833
14	1.466187	1.466309	1.466248	-0.002613	0.000061	0.0000416
15	1.466187	1.466248	1.466217	-0.001254	0.000031	0.0000208
16	1.466187	1.466217	1.466202	-0.000575	0.000015	0.0000104
17	1.466187	1.466202	1.466194	-0.000235	0.000008	0.0000052
18	1.466187	1.466194	1.466190	-0.000065	0.000004	0.0000026
19	1.466187	1.466190	1.466188	0.000020	0.000002	0.0000013
20	1.466188	1.466190	1.466189	-0.000023	0.000001	0.0000007

CONTOH 2.1.2 Dengan menggunakan metode Biseksi, tentukan akar real dari $x^{3.5} = 80$ di dalam selang $[2.0, 5.0]$ dengan $\varepsilon = 10^{-5}$.

Penyelesaian
Pada contoh ini persamaan ditulis dalam bentuk $x^{3.5} = 80$, oleh karena itu ubahlah dalam bentuk $f(x) = x^{3.5} - 80$ dan $f(x)$ adalah fungsi kontinu dengan selang dari akar adalah $a = 2.0$ dan $b = 5.0$, sehingga hitunglah $f(2.0) = -68.686292$ dan $f(5.0) = 199.508497$ terpenuhi untuk diselesaikan dengan metode Biseksi, karena $f(2.0) \cdot f(5.0) < 0$. Hitung p_1 dengan $a_1 = a = 2.0$ dan $b_1 = b = 5.0$

$$p_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{2.0 + 5.0}{2} = 3.5$$

kemudian hitung $f(p_1) = f(3.5) = 0.211780$ mempunyai tanda positif yang sama dengan tanda $f(b_1)$, sehingga

$$a_2 = a_1 \qquad b_2 = p_1$$

Langkah berikutnya, hitung $f(a_2) = f(2.0) = -68.686292$ dan $f(b_2) = f(3.5) = 0.211780$ dan hitunglah p_2, yaitu

$$p_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{2.0 + 3.5}{2} = 2.75$$

hitunglah $f(p_2) = f(2.75) = -45.512284$ mempunyai tanda negatif yang sama dengan tanda dari $f(a_2)$, sehingga

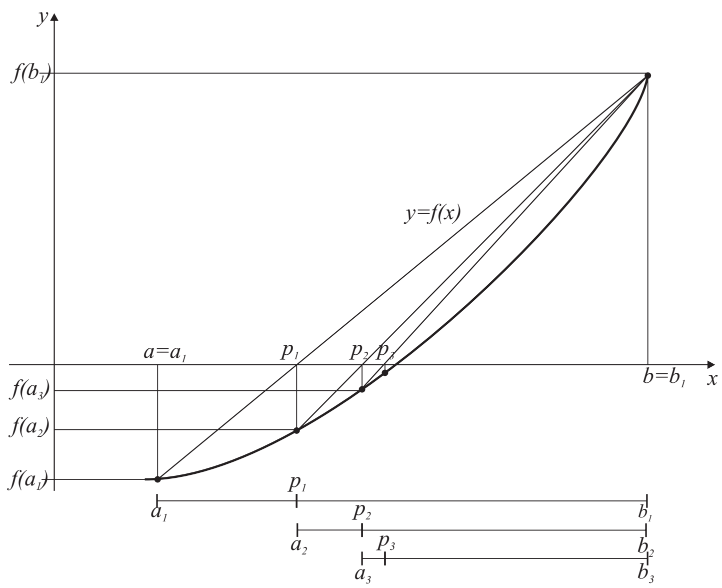
$$a_3 = p_2 \qquad b_3 = b_2$$

lebih lengkapnya dapat dilihat pada Tabel 2.2 dengan $\varepsilon_1 = |p_N - p_{N-1}|$ dan $\varepsilon_1 = \frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|}$

Berdasarkan Tabel 2.2, terlihat bahwa akar dari persamaan $x^{3.5} = 80$ adalah $p = 3.497414$ (pada putaran ke-17) dengan $\varepsilon_1 < \varepsilon$ atau $\varepsilon_2 < \varepsilon$. ◀

Tabel 2.2: Pencarian akar persamaan dari $x^{3.5} = 80$

n	a_N	b_N	p_N	$f(p_N)$	ε_1	ε_2
1	2.0	5.0	3.50	0.211780		
2	2.0	3.5	2.75	-45.512284	0.750000	0.2727273
3	2.75	3.5	3.125	-26.052034	0.375000	0.1200000
4	3.125000	3.500000	3.312500	-13.847600	0.187500	0.0566038
5	3.312500	3.500000	3.406250	-7.059654	0.093750	0.0275229
6	3.406250	3.500000	3.453125	-3.485623	0.046875	0.0135747
7	3.453125	3.500000	3.476563	-1.652500	0.023438	0.0067416
8	3.476563	3.500000	3.488281	-0.724274	0.011719	0.0033595
9	3.488281	3.500000	3.494141	-0.257228	0.005859	0.0016769
10	3.494141	3.500000	3.497070	-0.022969	0.002930	0.0008378
11	3.497070	3.500000	3.498535	0.094344	0.001465	0.0004187
12	3.497070	3.498535	3.497803	0.035672	0.000732	0.0002094
13	3.497070	3.497803	3.497437	0.006347	0.000366	0.0001047
14	3.497070	3.497437	3.497253	-0.008312	0.000183	0.0000524
15	3.497253	3.497437	3.497345	-0.000983	0.000092	0.0000262
16	3.497345	3.497437	3.497391	0.002682	0.000046	0.0000131
17	3.497391	3.497437	3.497414	0.004515	0.000023	0.0000065
18	3.497414	3.497437	3.497425	0.005431	0.000011	0.0000033
19	3.497425	3.497437	3.497431	0.005889	0.000006	0.0000016
20	3.497431	3.497437	3.497434	0.006118	0.000003	0.0000008



Gambar 2.3: Sketsa Pencarian Akar dengan Metode Regula Falsi

2.1.2 Metode Regula Falsi

Dengan mengandaikan bahwa suatu fungsi f kontinu pada selang $[a, b]$ dan berlaku $f(a) \cdot f(b) < 0$, ada satu atau lebih titik diantara selang tersebut, misal titik c, maka berlaku $f(c) = 0$ dan c dinamakan akar persamaan dari $f(x)$. Kalau metode Biseksi, pendekatannya adalah membagi dua bagian sama panjang, maka metode Regula Falsi mencari titik potong garis yang menghubungkan dua titik yaitu titik $(a, f(a))$ dan titik $(b, f(b))$ sehingga memotong sumbu-x di p_1. Untuk memulai pencarian akar persamaan dengan metode Regula Falsi, tentukan $a_1 = a$ dan $b_1 = b$ (pastikan mempunyai tanda yang berbeda) dan titik p_1 adalah titik potong garis yang menghubungkan dua titik dengan di sumbu-x. Sebelum mencari titik p_1, perhatikan persamaan garis yang melalui dua titik, yaitu titik $(a_1, f(a_1))$ dan titik $(b_1, f(b_1))$.

$$\frac{y - f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} = \frac{x - a_1}{b_1 - a_1}$$

persamaan garis akan memotong di titik $(p_1, 0)$, sehingga

$$\frac{-f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} = \frac{p_1 - a_1}{b_1 - a_1}$$

atau

$$p_1 - a_1 = \frac{-f(a_1)(b_1 - a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}$$

atau

$$p_1 = a_1 - \frac{f(a_1)(b_1 - a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}$$

kemudian hitung $f(p_1)$,

- Jika $f(p_1) = 0$, maka $p = p_1$ dan selesai.
- Jika $f(p_1) \neq 0$, maka $f(p_1)$ mempunyai tanda yang **sama** dengan $f(a_1)$ atau $f(b_1)$.
  - Jika $f(p_1)$ mempunyai tanda yang **sama** dengan $f(a_1)$, hal ini mempunyai arti bahwa $p \in (p_1, b_1)$, maka tentukan $a_2 = p_1$ dan $b_2 = b_1$.
  - Jika $f(p_1)$ mempunyai tanda yang **tidak sama** dengan $f(a_1)$, hal ini mempunyai arti bahwa $p \in (a_1, p_1)$, maka tentukan $a_2 = a_1$ dan $b_2 = p_1$.

  Lakukan perhitungan p_2 dengan rumus yang sama, yaitu

$$p_2 = a_2 - \frac{f(a_2)(b_2 - a_2)}{f(b_2) - f(a_2)}$$

lakukan hal tersebut berulang kali sampai dengan $f(p_i) = 0$ atau mendekati, seperti pada Gambar 2.3.

Algoritma Regula-Falsi
Untuk menemukan akar persamaan dari $f(x) = 0$ dengan f kontinu pada selang $[a, b]$ dengan $f(a)$ dan $f(b)$ mempunyai tanda yang berlawanan.

INPUT: titik awal a dan b, toleransi TOL, putaran maksimal N_0.
OUTPUT: solusi pendekatan p atau pesan gagal.

1. Tentukan $i = 1$;
   $FA = f(a)$.
2. While $i \leq N_0$ lakukan langkah 3 sampai dengan 6
3. Tentukan $p = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}$ (Menghitung p_i) $FP = f(p)$
4. If $FR = 0$ atau $\frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)} < TOL$ then
   OUTPUT(p). (Proses pencarian telah selesai dan ditemukan) STOP.
5. Tentukan $i = i + 1$.

6. If $FA.FP > 0$
   then tentukan $a = p$ (hitung a_i dan b_i) else tentukan $b = p$ (FA tidak berubah)

7. OUTPUT ('Metode GAGAL setelah melalui iterasi N_0 =',N_0)
   (Proses telah selesai tetapi tidak ditemukan)
   STOP.

Proses bisa juga berhenti, seperti pada Algoritma di atas pada langkah ke-4, yaitu dengan memberikan nilai toleransi $\varepsilon > 0$ dan menghasilkan p_1, p_2, $\cdots$, p_N sampai dengan kondisi berikut terpenuhi

$$|p_N - p_{N-1}| < \varepsilon \tag{2.4}$$

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \varepsilon, p_N \neq 0, \text{atau} \tag{2.5}$$

$$|f(p_N)| < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Contoh 2.1.3 Dengan menggunakan metode Regula Falsi, tentukan akar real dari $f(x) = -2x^5 - 1.6x^3 + 12x + 1$ di dalam selang $[1, 2]$ dengan $\varepsilon = 10^{-5}$.

Penyelesaian
$f(x)$ adalah fungsi kontinu dan selang dari akar adalah $a = 1$ dan $b = 2$ dan hitung $f(1) = 9.4$ dan $f(2) = -51.8$ terpenuhi untuk diselesaikan dengan metode Regula Falsi, karena $f(1) \cdot f(2) < 0$. Hitung p_1, dengan $a_1 = a = 1$ dan $b_1 = b = 2$,

$$p_1 = a_1 - \frac{f(a_1)(b_1 - a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} = 1 - \frac{1 \cdot (2 - 1)}{9.4 - (-51.8)} = 1.153595$$

kemudian hitung $f(p_1) = f(1.153595) = 8.300865$ mempunyai tanda positif yang sama dengan tanda $f(a_1)$, sehingga

$$a_2 = p_1 \qquad b_2 = b_1$$

sehingga $f(a_2) = f(1.153595) = 8.300865$ dan $f(b_2) = f(2.0) = -51.8$, kemudian hitung p_2, dengan rumus yang sama, yaitu

$$\begin{aligned} p_2 &= a_2 - \frac{f(a_2)(b_2 - a_2)}{f(b_2) - f(a_2)} \\ &= 1.153595 - \frac{8.300865 \cdot (2 - 1.153595)}{8.300865 - (-51.8)} \\ &= 1.270497 \end{aligned}$$

dan hitung $f(p_2) = f(1.270497) = 6.3441$ mempunyai tanda positif yang sama dengan tanda $f(a_2)$, sehingga

$$a_3 = p_2 \qquad b_3 = b_2$$

selanjutnya dapat dilihat pada Tabel 2.3 dengan $\varepsilon_1 = |p_N - p_{N-1}|$ dan $\varepsilon_2 = \frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|}$

Berdasarkan Tabel 2.3, terlihat bahwa akar dari persamaan $f(x) = -2x^5 - 1.6x^3 + 12x + 1$ adalah $p = 1.466182$ (pada putaran ke-19) dengan $\varepsilon_1 < \varepsilon$ atau $\varepsilon_2 < \varepsilon$. ◀

Tabel 2.3: Pencarian akar persamaan dari $f(x) = -2x^5 - 1.6x^3 + 12x + 1$

n	a_N	b_N	p_N	$f(p_N)$	ε_1	ε_2
1	1.000000	2.000000	1.153595	8.300865		
2	1.153595	2.000000	1.270497	6.344100	0.116902	0.092013
3	1.270497	2.000000	1.350093	4.292558	0.079596	0.058956
4	1.350093	2.000000	1.399828	2.659293	0.049735	0.035529
5	1.399828	2.000000	1.429135	1.556097	0.029307	0.020507
6	1.429135	2.000000	1.445783	0.879874	0.016649	0.011516
7	1.445783	2.000000	1.455040	0.487817	0.009257	0.006362
8	1.455040	2.000000	1.460124	0.267494	0.005084	0.003482
9	1.460124	2.000000	1.462898	0.145793	0.002774	0.001896
10	1.462898	2.000000	1.464405	0.079199	0.001507	0.001029
11	1.464405	2.000000	1.465223	0.042946	0.000818	0.000558
12	1.465223	2.000000	1.465666	0.023265	0.000443	0.000302
13	1.465666	2.000000	1.465906	0.012596	0.000240	0.000164
14	1.465906	2.000000	1.466036	0.006818	0.000130	0.000089
15	1.466036	2.000000	1.466106	0.003690	0.000070	0.000048
16	1.466106	2.000000	1.466144	0.001997	0.000038	0.000026
17	1.466144	2.000000	1.466165	0.001081	0.000021	0.000014
18	1.466165	2.000000	1.466176	0.000585	0.000011	0.000008
19	1.466176	2.000000	1.466182	0.000316	0.000006	0.000004
20	1.466182	2.000000	1.466185	0.000171	0.000003	0.000002
21	1.466185	2.000000	1.466187	0.000093	0.000002	0.000001
22	1.466187	2.000000	1.466188	0.000050	0.000001	0.000001
23	1.466188	2.000000	1.466188	0.000027	0.000001	0.000000
24	1.466188	2.000000	1.466189	0.000015	0.000000	0.000000
25	1.466189	2.000000	1.466189	0.000008	0.000000	0.000000

Tabel 2.4: Pencarian akar persamaan dari $x^{3.5} = 80$

n	a_N	b_N	p_N	$f(p_N)$	ε_1	ε_2
1	2.000000	5.000000	2.768318	-44.701529		
2	2.768318	5.000000	3.176817	-22.855720	0.408499	0.128588
3	3.176817	5.000000	3.364213	-10.161927	0.187396	0.055703
4	3.364213	5.000000	3.443493	-4.229976	0.079280	0.023023
5	3.443493	5.000000	3.475809	-1.711890	0.032316	0.009297
6	3.475809	5.000000	3.488776	-0.684878	0.012967	0.003717
7	3.488776	5.000000	3.493946	-0.272735	0.005170	0.001480
8	3.493946	5.000000	3.496002	-0.108410	0.002056	0.000588
9	3.496002	5.000000	3.496819	-0.043060	0.000817	0.000234
10	3.496819	5.000000	3.497144	-0.017099	0.000324	0.000093
11	3.497144	5.000000	3.497272	-0.006789	0.000129	0.000037
12	3.497272	5.000000	3.497324	-0.002695	0.000051	0.000015
13	3.497324	5.000000	3.497344	-0.001070	0.000020	0.000006
14	3.497344	5.000000	3.497352	-0.000425	0.000008	0.000002
15	3.497352	5.000000	3.497355	-0.000169	0.000003	0.000001
16	3.497355	5.000000	3.497356	-0.000067	0.000001	0.000000
17	3.497356	5.000000	3.497357	-0.000027	0.000001	0.000000
18	3.497357	5.000000	3.497357	-0.000011	0.000000	0.000000
19	3.497357	5.000000	3.497357	-0.000004	0.000000	0.000000
20	3.497357	5.000000	3.497357	-0.000002	0.000000	0.000000

CONTOH 2.1.4 Dengan menggunakan metode Regula Falsi, tentukan akar real dari $x^{3.5} = 80$ di dalam selang $[2.0, 5.0]$ dengan $\varepsilon = 10^{-5}$.

Penyelesaian
Pada contoh ini persamaan ditulis dalam bentuk $x^{3.5} = 80$ seperti pada contoh di Metode Biseksi, oleh karena itu ubahlah dalam bentuk $f(x) = x^{3.5} - 80$ dan $f(x)$ adalah fungsi kontinu dengan selang dari akar adalah $a = 2.0$ dan $b = 5.0$, sehingga hitunglah $f(2.0) = -68.686292$ dan $f(5.0) = 199.508497$ terpenuhi untuk diselesaikan dengan metode Regula Falsi, karena $f(2.0) \cdot f(5.0) < 0$. Hitung p_1 dengan $a_1 = a = 2.0$

dan $b_1 = b = 5.0$

$$\begin{aligned} p_1 &= a_1 - \frac{f(a_1)(b_1 - a_1)}{f(b_1) - f(a_1)} \\ &= 2.0 - \frac{-68.686292 \cdot (5-2)}{199.508497 - (-68.686292)} \\ &= 2.768318 \end{aligned}$$

kemudian hitung $f(p_1) = f(2.768318) = -44.701529$ mempunyai tanda negatif yang sama dengan tanda $f(a_1)$, sehingga

$$a_2 = p_1 \qquad b_2 = b_1$$

Langkah berikutnya, hitung $f(a_2) = f(2.768318) = -44.701529$ dan $f(b_2) = f(5.0) = 199.508497$ dan hitunglah p_2, yaitu

$$\begin{aligned} p_2 &= a_2 - \frac{f(a_2)(b_2 - a_2)}{f(b_2) - f(a_2)} \\ &= 2.768318 - \frac{-44.701529 \cdot (5-2)}{199.508497 - (-44.701529)} \\ &= 3.176817 \end{aligned}$$

hitunglah $f(p_2) = f(3.176817) = -22.85572$ mempunyai tanda negatif yang sama dengan tanda dari $f(a_2)$, sehingga

$$a_3 = p_2 \qquad b_3 = b_2$$

lebih lengkapnya dapat dilihat pada Tabel 2.4 dengan $\varepsilon_1 = |p_N - p_{N-1}|$ dan $\varepsilon_2 = \frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|}$

Berdasarkan Tabel 2.4, terlihat bahwa akar dari persamaan $x^{3.5} = 80$ adalah $p = 3.497352$ (pada putaran ke-14) dengan $\varepsilon_1 < \varepsilon$ atau $\varepsilon_2 < \varepsilon$. ◀

SOAL-SOAL LATIHAN 2.1

Untuk lebih memahami materi yang telah diuraikan di atas, kerjakanlah soal-soal latihan berikut ini!

1. Dengan menggunakan metode Biseksi, carilah akar dari persamaan $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ pada selang $[1, 3.2]$ dengan keakurasian sampai dengan 10^{-3}.

2. Dengan menggunakan metode Regula-Falsi, carilah akar dari persamaan $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ pada selang $[1, 3.2]$ dengan keakurasian sampai dengan 10^{-3}.

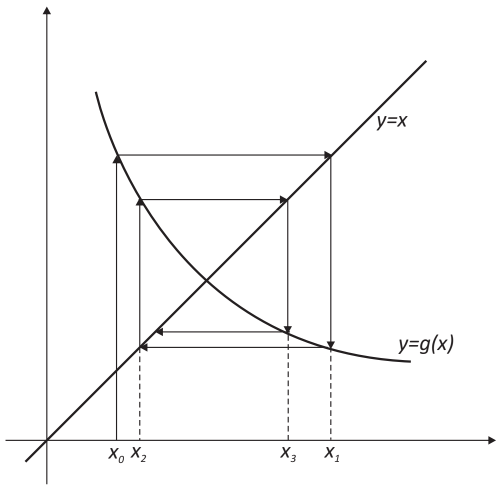
3. Dengan menggunakan metode Biseksi, carilah akar dari persamaan $3x - e^x = 0$ pada selang $[0, 1]$ dengan keakurasian sampai dengan 10^{-5}.

4. Dengan menggunakan metode Regula-Falsi, carilah akar dari persamaan $3x - e^x = 0$ pada selang $[0, 1]$ dengan keakurasian sampai dengan 10^{-5}.

5. Diketahui persamaan $f(x) = e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$ dengan selang $[0, 1]$, gunakan metode Biseksi dan Regula Falsi untuk mendapatkan akar pendekatan.

2.2 Metode Terbuka

Pada metode tertutup, akar dari suatu persamaan terletak di dalam selang yang sudah ditentukan, dan begitu juga selang berikutnya, sehingga akar dari persamaan selalu ditemukan. Pada bagian ini diperkenalkan mencari akar dengan metode terbuka, dikatakan metode terbuka karena menggunakan satu batasan saja. Tiga metode yang akan dikenalkan pada bagian ini yaitu Metode Iterasi Fixed-Point, Metode Newton-Raphson dan Metode Secant.



Gambar 2.4: Sketsa Pencarian Akar dengan Metode *Fixed-Point*

2.2.1 Metode Iterasi *Fixed-Point*

Untuk mendapatkan akar dari suatu persamaan $f(x) = 0$ dengan metode iterasi fixed-point dengan mengubah persamaan $f(x) = 0$ tersebut menjadi $x = g(x)$. Metode ini memerlukan satu titik awal atau dua titik awal tetapi tidak perlu mengurung akar. Metode iterasi ini mengubah satu fungsi menjadi dua fungsi yang saling berpotongan yaitu sebuah fungsi $y = x$ dan $y = g(x)$, seperti Gambar 2.4. Pada Gambar 2.4 terlihat pemilihan titik awal (x_0) yang tepat, sehingga untuk mencari x_i berikutnya makin menuju ke titik perpotongan. Sedangkan pada Gambar 2.5, pemilihan titik awal (x_0 yang kurang tepat, titik selanjutnya makin menjauh dari titik potong. Hal ini juga terjadi pada saat perubahan fungsi dari $f(x) = 0$ menjadi $x = g(x)$.

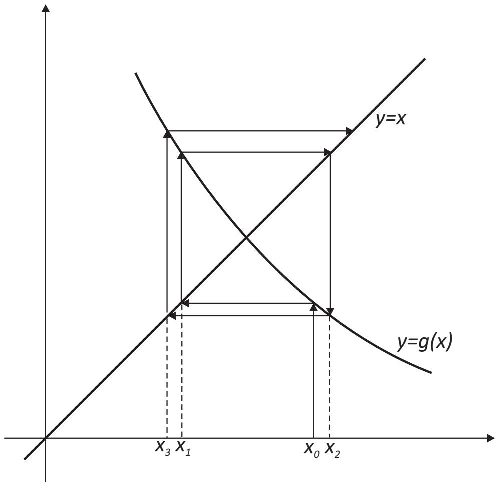
Proses perhitungan menggunakan metode iterasi *fixed-point* dengan menggunakan rumus

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

yang mempunyai algoritma seperti di bawah ini.

Algoritma Iterasi *Fixed-Point*
Untuk menemukan akar persamaan dari $f(x) = 0$ dengan f kontinu dan titik awal p_0.

INPUT: titik awal p_0, toleransi TOL, putaran maksimal N_0.
OUTPUT: solusi pendekatan p atau pesan gagal.



Gambar 2.5: Sketsa Pencarian Akar dengan Metode Fixed-Point

Langkah-1 Tentukan $i = 1$;

Langkah-2 While $i \leq N_0$ lakukan langkah 3 sampai dengan 6

Langkah-3 Tentukan $p = g(p_0)$ (Menghitung p_i)

Langkah-4 If $|p - p_0| < TOL$ then
OUTPUT(p). (Proses pencarian telah selesai dan ditemukan) STOP.

Langkah-5 Tentukan $i = i + 1$.

Langkah-6 Tentukan $p_0 = p$

Langkah-7 OUTPUT ('Metode GAGAL setelah melalui iterasi N_0 =',N_0)
(Proses telah selesai tetapi tidak ditemukan)
STOP.

Contoh 2.2.1 Dengan menggunakan metode iterasi *fixed-point*, tentukan akar real dari $f(x) = -2x^5 - 1.6x^3 + 12x + 1 = 0$ dengan titik awal $x_0 = 1.0$.

Penyelesaian
Ubahlah $f(x) = -2x^5 - 1.6x^3 + 12x + 1 = 0$ menjadi

$$x = g(x) = \frac{1}{12}(2x^5 + 1.6x^3 - 1)$$

dengan nilai awal $x_0 = 1.0$, maka

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{12}(2x_0^5 + 1.6x_0^3 - 1) \\ &= \frac{1}{12}(2(1.0)^5 + 1.6(1.0)^3 - 1) \\ &= 2.60 \end{aligned}$$

berikutnya adalah menghitung x_2, yaitu

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{12}(2x_0^5 + 1.6x_0^3 - 1) \\ &= \frac{1}{12}(2(2.6)^5 + 1.6(2.6)^3 - 1) \\ &= 264.7491 \end{aligned}$$

terlihat bahwa nilai $x_2 \gg x_1$, nilai x_i adalah divergen, artinya perubahan $x = g(x)$ tidak sesuai.

Sekarang, ubahlah $f(x) = -2x^5 - 1.6x^3 + 12x + 1 = 0$ menjadi

$$x = g(x) = \left(\frac{1}{1.6}(2x^5 - 12x - 1)\right)^{\frac{1}{3}}$$

dengan nilai awal yaitu $x_0 = 1.0$, dan hitunglah x_1, yaitu

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(\frac{1}{1.6}\left(2x_0^5 - 12x_0 - 1\right)\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{1}{1.6}\left(2(1.0)^5 - 12(1.0) - 1\right)\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= -1.9015 \end{aligned}$$

berikutnya adalah menghitung x_2, yaitu

$$\begin{aligned} x_2 &= \left(\frac{1}{1.6}\left(2x_1^5 - 12x_1 - 1\right)\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{1}{1.6}\left(2(-1.9015)^5 - 12(-1.9015) - 1\right)\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= -2.5931 \end{aligned}$$

dengan cara yang sama, hitung x_3, yaitu

$$\begin{aligned} x_3 &= \left(\frac{1}{1.6}\left(2x_2^5 - 12x_2 - 1\right)\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{1}{1.6}\left(2(-2.5931)^5 - 12(-2.5931) - 1\right)\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= -5.036 \end{aligned}$$

ulangi dengan menghitung x_4, yaitu

$$\begin{aligned} x_4 &= \left(\frac{1}{1.6}\left(2x_3^5 - 12x_3 - 1\right)\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{1}{1.6}\left(2(-5.036)^5 - 12(-5.036) - 1\right)\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= -15.8897 \end{aligned}$$

Sama seperti yang pertama, nilai x divergen. Oleh karena itu lakukan perubahan $f(x) = -2x^5 - 1.6x^3 + 12x + 1 = 0$ menjadi

$$x = g(x) = \left(\frac{1}{2}(-1,6x^3 + 12x + 1)\right)^{\frac{1}{5}}$$

dengan nilai awal yaitu $x_0 = 1.0$, dan hitunglah x_1, yaitu

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(\frac{1}{2}(-1,6x_0^3 + 12x_0 + 1)\right)^{\frac{1}{5}} \\ &= \left(\frac{1}{2}(-1,6(1.0)^3 + 12(1.0) + 1)\right)^{\frac{1}{5}} \\ &= 1.4164 \end{aligned}$$

berikutnya adalah menghitung x_2, yaitu

$$\begin{aligned} x_2 &= \left(\frac{1}{2}(-1,6x_1^3 + 12x_1 + 1)\right)^{\frac{1}{5}} \\ &= \left(\frac{1}{2}(-1,6(1.4164)^3 + 12(1.4164) + 1)\right)^{\frac{1}{5}} \\ &= 1.4640 \end{aligned}$$

dengan cara yang sama, hitung x_3, yaitu

$$\begin{aligned} x_3 &= \left(\frac{1}{2}(-1,6x_2^3 + 12x_2 + 1)\right)^{\frac{1}{5}} \\ &= \left(\frac{1}{2}(-1,6(1.4640)^3 + 12(1.4640) + 1)\right)^{\frac{1}{5}} \\ &= 1.4661 \end{aligned}$$

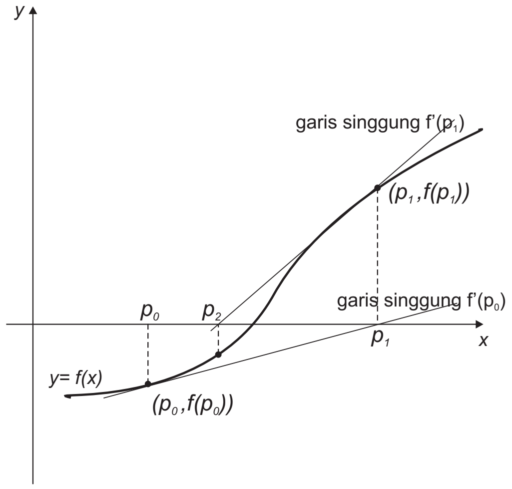
ulangi, untuk menghitung x_4, yaitu

$$\begin{aligned} x_4 &= \left(\frac{1}{2}(-1,6x_3^3 + 12x_3 + 1)\right)^{\frac{1}{5}} \\ &= \left(\frac{1}{2}(-1,6(1.4661)^3 + 12(1.4661) + 1)\right)^{\frac{1}{5}} \\ &= 1.4662 \end{aligned}$$

ulangi, untuk menghitung x_5, yaitu

$$\begin{aligned} x_5 &= \left(\frac{1}{2}(-1,6x_4^3 + 12x_4 + 1)\right)^{\frac{1}{5}} \\ &= \left(\frac{1}{2}(-1,6(1.4662)^3 + 12(1.4662) + 1)\right)^{\frac{1}{5}} \\ &= 1.4662 \end{aligned}$$

ternyata $x_5 = x_4$, jadi akar dari $f(x) = -2x^5 - 1.6x^3 + 12x + 1 = 0$ adalah $x = 1.4662$.
◀



Gambar 2.6: Sketsa Pencarian Akar dengan Metode Newton-Raphson

2.2.2 Metode Newton-Raphson

Sebelum mencari akar dari persamaan, perhatikan terlebih dahulu deret Taylor dari sutu fungsi $f(p)$ disekitar p_0 dengan $|p - p_0|$ kecil, deret Taylor tersebut adalah

$$f(p) = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2} f''(\xi(p))$$

dengan $\xi(p)$ terletak di antara p dan p_0. Jika $f(p) = 0$, maka

$$0 = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2} f''(\xi(p))$$

karena $|p - p_0|$ kecil, maka $|p - p_0|^2$ sangat kecil dan dianggap sama dengan nol, maka

$$0 = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0)$$

dan solusi untuk p adalah

$$p \approx p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} \equiv p_1$$

jika perhitungan diulang berulang kali, maka

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}, \quad \text{untuk} \quad n \geq 1$$

seperti pada Gambar 2.6.

Algoritma Newton-Raphson
Untuk menemukan akar persamaan dari $f(x) = 0$ dengan f kontinu dan titik awal p_0.

INPUT: titik awal p_0, toleransi TOL, putaran maksimal N_0.
OUTPUT: solusi pendekatan p atau pesan gagal.

Langkah-1 Tentukan $i = 1$;

Langkah-2 While $i \leq N_0$ lakukan langkah 3 sampai dengan 6

Langkah-3 Tentukan $p = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$ (Menghitung p_i)

Langkah-4 If $|p - p_0| < TOL$ then
OUTPUT(p). (Proses pencarian telah selesai dan ditemukan) STOP.

Langkah-5 Tentukan $i = i + 1$.

Langkah-6 Tentukan $p_0 = p$

Langkah-7 OUTPUT ('Metode GAGAL setelah melalui iterasi N_0 =',N_0)
(Proses telah selesai tetapi tidak ditemukan)
STOP.

Contoh 2.2.2 Dengan menggunakan metode Newto-Raphson, tentukan akar real dari $f(x) = -2x^5 - 1.6x^3 + 12x + 1 = 0$ dengan titik awal $x_0 = 1.0$.

Tabel 2.5: Pencarian akar persamaan dari $f(x) = -2x^5 - 1.6x^3 + 12x + 1$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	ε_1	ε_2
0	1.000000	9.400000	-2.800000		
1	4.357143	-3219.855394	-3683.312547	3.357143	0.770492
2	3.482969	-1049.935743	-1517.858552	0.874174	0.250985
3	2.791247	-339.160875	-632.403494	0.691722	0.247818
4	2.254943	-106.888489	-270.955417	0.536305	0.237835
5	1.860455	-31.556455	-124.419790	0.394487	0.212038
6	1.606826	-7.778658	-67.054707	0.253629	0.157845
7	1.490822	-1.140125	-48.065510	0.116005	0.077813
8	1.467102	-0.040702	-44.659159	0.023720	0.016168
9	1.466190	-0.000058	-44.531314	0.000911	0.000622
10	1.466189	0.000000	-44.531130	0.000001	0.000001

Penyelesaian

Carilah $f'(x)$ dari $f(x) = -2x^5 - 1.6x^3 + 12x + 1$, adalah $f'(x) = -10x^4 - 4.8x^2 + 12$, kemudian hitung x_1, dengan nilai awal $x_0 = 1.0$, maka

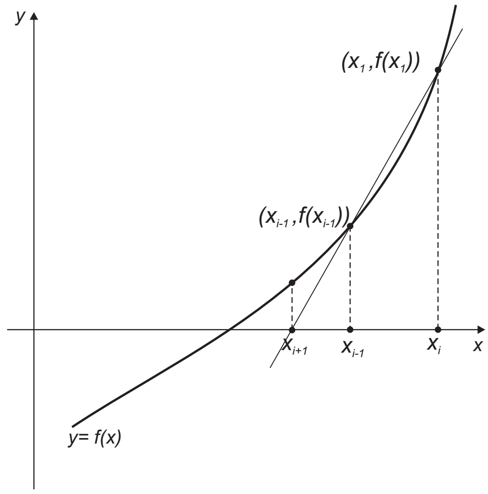
$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{-2x_0^5 - 1.6x_0^3 + 12x_0 + 1}{-10x_0^4 - 4.8x_0^2 + 12} \\ &= 1.0 - \frac{-2(1.0)^5 - 1.6(1.0)^3 + 12(1.0) + 1}{-10(1.0)^4 - 4.8(1.0)^2 + 12} \\ &= 4.357143 \end{aligned}$$

dengan cara yang sama hitung x_2, yaitu

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{-2x_1^5 - 1.6x_1^3 + 12x_1 + 1}{-10x_1^4 - 4.8x_1^2 + 12} \\ &= 4.357143 - \frac{-2(4.357143)^5 - 1.6(4.357143)^3 + 12(4.357143) + 1}{-10(4.357143)^4 - 4.8(4.357143)^2 + 12} \\ &= 3.482969 \end{aligned}$$

Berdasarkan Tabel 2.5, terlihat bahwa akar dari persamaan $f(x) = -2x^5 - 1.6x^3 + 12x + 1 = 0$ adalah $x = 1.466189$ (pada putaran ke-10) dengan $\varepsilon_1 < \varepsilon$ atau $\varepsilon_2 < \varepsilon$. ◄

2.2.3 Metode Secant



Gambar 2.7: Sketsa Pencarian Akar dengan Metode Secant

Metode secant hampir mirip dengan metode Regula-Falsi, yaitu mencari persamaan garis yang melalui dua titik, bedanya dengan metode Regula-Falsi yaitu pemilihan dua titik tidak harus mempunyai syarat $f(a) \cdot f(b) < 0$. Misal dua titik tersebut adalah $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ dan $(x_i, f(x_i))$, maka persamaan garis dari dua titik tersebut adalah

$$\frac{y - f(x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i}$$

persamaan garis akan memotong di titik $(x_{i+1}, 0)$, sehingga

$$\frac{-f(x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i-1} - x_i}$$

atau

$$x_{i+1} - x_i = \frac{-f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

atau

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

persamaan ini adalah rumus metode Secant.

- Jika $f(x_{i+1}) = 0$, maka akar dari persamaan adalah x_{i+1} dan selesai.
- Jika $f(x_{i+1}) \neq 0$, maka lakukan

$$\begin{aligned} x_{i-1} &= x_i \\ x_i &= x_{i+1} \end{aligned}$$

Lakukan perhitungan x_{i+1} dengan rumus yang sama, yaitu

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

lakukan hal tersebut berulang kali sampai dengan $f(x_{i+1}) = 0$ atau mendekati 0.

Algoritma Secant
Untuk menemukan akar persamaan dari $f(x) = 0$ dengan f kontinu dengan nilai awal p_0 dan p_1.

INPUT: titik awal p_0 dan p_1, toleransi TOL, putaran maksimal N_0.
OUTPUT: solusi pendekatan p atau pesan gagal.

Langkah-1 Tentukan $i = 2$;
$q_0 = f(p_0)$ dan $q_1 = f(p_1)$.

Langkah-2 While $i \leq N_0$ lakukan langkah 3 sampai dengan 6

Langkah-3 Tentukan $p = p_1 - \frac{q_1(p_1-p_0)}{q_1-q_0}$ (Menghitung p_i)

Langkah-4 If $|p - p_1| < TOL$ then
OUTPUT(p). (Proses pencarian telah selesai dan ditemukan) STOP.

Langkah-5 Tentukan $i = i + 1$.

Langkah-6 Tentukan $p_0 = p_1$; (update p_0, q_0, p_1, q_1)
$q_0 = q_1$; $p_1 = p$; dan $q_1 = f(p)$;

Langkah-7 OUTPUT ('Metode GAGAL setelah melalui iterasi N_0 =',N_0)
(Proses telah selesai tetapi tidak ditemukan)
STOP.

Proses bisa juga berhenti, seperti pada Algoritma di atas pada langkah ke-4, yaitu dengan memberikan nilai toleransi $\varepsilon > 0$ dan menghasilkan $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_N$ sampai dengan kondisi berikut terpenuhi

$$|p_N - p_{N-1}| < \varepsilon \tag{2.7}$$

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \varepsilon, p_N \neq 0, \text{atau} \tag{2.8}$$

$$|f(p_N)| < \varepsilon. \tag{2.9}$$

Contoh 2.2.3 Dengan menggunakan metode secant, tentukan akar real dari $f(x) = -2x^5 - 1.6x^3 + 12x + 1$ dengan $x_0 = 1$ dan $x_1 = 2$ dengan $\varepsilon = 10^{-5}$.

Penyelesaian
$f(x)$ adalah fungsi kontinu dan titik awal adalah $x_0 = 1$ dan $x_1 = 2$ serta hitung $f(1) = 9.4$ dan $f(2) = -51.8$. Hitung x_2, dengan rumus di atas

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)} \\ &= 2 - \frac{-51.8(1.0 - 2.0)}{9.4 - (-51.81)} \\ &= 1.153595 \end{aligned}$$

kemudian hitung $f(x_2) = f(1.153595) = 8.300865$, sehingga

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)(x_1 - x_2)}{f(x_1) - f(x_2)} \\ &= 1.153595 - \frac{-51.8(2.0 - 1.153595)}{-51.8 - 8.300865)} \\ &= 1.270497 \end{aligned}$$

hitung $f(x_3) = f(1.270497) = 6.3441$, sehingga

$$\begin{aligned} x_4 &= x_3 - \frac{f(x_3)(x_2 - x_3)}{f(x_2) - f(x_3)} \\ &= 1.270497 - \frac{-51.8(1.153595 - 1.270497)}{8.300865 - 6.3441)} \\ &= 1.649508 \end{aligned}$$

hitung $f(x_4) = f(1.649508) = -10.81$, sehingga

$$\begin{aligned} x_5 &= x_4 - \frac{f(x_4)(x_3 - x_4)}{f(x_3) - f(x_4)} \\ &= 1.649508 - \frac{-10.81(1.270497 - 1.649508)}{6.3441 - (-10.81))} \\ &= 1.410666 \end{aligned}$$

selanjutnya dapat dilihat pada Tabel 2.6 dengan $\varepsilon_1 = |p_N - p_{N-1}|$ dan $\varepsilon_1 = \frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|}$

Tabel 2.6: Pencarian akar persamaan dari $f(x) = -2x^5 - 1.6x^3 + 12x + 1$

n	x_{i-1}	x_i	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	x_{i+1}	ε_1
1	1.000000	2.000000	9.400000	-51.800000	1.153595	0.846405
2	2.000000	1.153595	-51.800000	8.300865	1.270497	0.116902
3	1.153595	1.270497	8.300865	6.344100	1.649508	0.379011
4	1.270497	1.649508	6.344100	-10.810041	1.410666	0.238842
5	1.649508	1.410666	-10.810041	2.263967	1.452025	0.041359
6	1.410666	1.452025	2.263967	0.616797	1.467512	0.015487
7	1.452025	1.467512	0.616797	-0.059061	1.466159	0.001353
8	1.467512	1.466159	-0.059061	0.001330	1.466189	0.000030
9	1.466159	1.466189	0.001330	0.000003	1.466189	0.000000

Berdasarkan Tabel 2.6, terlihat bahwa akar dari persamaan $f(x) = -2x^5 - 1.6x^3 + 12x + 1$ adalah $p = 1.466189$ (pada putaran ke-8) dengan $\varepsilon_1 < \varepsilon$ atau $\varepsilon_2 < \varepsilon$. ◀

SOAL-SOAL LATIHAN 2.2

Untuk lebih memahami materi yang telah diuraikan di atas, kerjakanlah soal-soal latihan berikut ini!

1. Dengan menggunakan metode iterasi Fixed-Point, carilah akar dari persamaan $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ dengan titik awal $x_0 = 1.003$ dengan keakurasian sampai dengan 10^{-3}.

2. Dengan menggunakan metode Newton-Raphson, carilah akar dari persamaan $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ dengan titik awal $x_0 = 1.003$ dengan keakurasian sampai dengan 10^{-3}.

3. Dengan menggunakan metode Secant, carilah akar dari persamaan $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ dengan titik awal $x_0 = 1.0$ dan $x_1 = 3.2$ dengan keakurasian sampai dengan 10^{-3}.

4. Dengan menggunakan metode iterasi Fixed-Point, carilah akar dari persamaan $3x - e^x = 0$ dengan titik awal $x_0 = 1.0$ dengan keakurasian sampai dengan 10^{-5}.

5. Dengan menggunakan metode Newton-Raphson, carilah akar dari persamaan $3x - e^x = 0$ dengan titik awal $x_0 = 1.0$ dengan keakurasian sampai dengan 10^{-5}.

6. Dengan menggunakan metode Secant, carilah akar dari persamaan $3x - e^x = 0$ dengan titik awal $x_0 = 0.0$ dan $x_1 = 1.0$ dengan keakurasian sampai dengan 10^{-5}.

2.3 Akar Polinomial

Perhatikan persamaan polinomial tingkat-n berikut ini

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

dengan n adalah order dari polinomial dan a_i adalah koefisien konstan dengan $a_n \neq 0$. Koefisien tersebut dapat berupa bilangan kompleks, tetapi pada bagian ini akan dibahas hanya pada koefisien bilangan real. Akar dari sebuah polinomial dapat berupa bilangan real atau bilangan kompleks. Akar-akar dari polinomial tersebut mengikuti aturan-aturan berikut ini:

1. Polinomial dengan order n, maka akan ada n akar bilangan real atau bilangan kompleks. Perlu diketahui bahwa akar-akar tersebut tidak harus berbeda.

2. Jika n ganjil, setidaknya ada satu akar real.

3. Jika akar dari polinomial adalah bilangan kompleks, maka pasangan konjugatnya (yaitu, $\lambda + \mu i$ dan $\lambda - \mu i$ dengan $i = \sqrt{-1}$) juga akar dari polinomial tersebut.

Ada dua metode yang akan dikenalkan untuk mencari akar-akar polinomial, yaitu

1. metode Mullers.

2. metode Bairstows;

2.3.1 Metode Mullers

Untuk menentukan satu akar dari polinomial order-n, jika mencari akar dilakukan lagi dengan lokasi yang sama, maka kemungkinan akan menemukan akar yang sama. Oleh karena itu, sebaiknya akar yang sudah ditemukan dihapus terlebih dahulu sebelum mencari akar yang lainnya. Proses penghapusan ini dinamakan sebagai polinomial deflasi.

Perhatikan polinomial order-5 tersebut

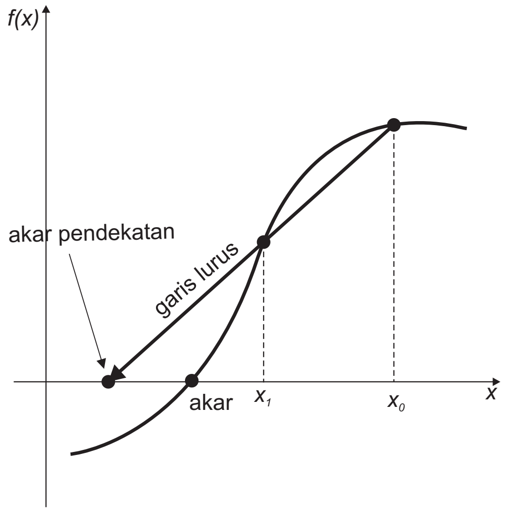
$$P_5(x) = -120 - 46x + 79x^2 - 3x^3 - 7x^4 + x^5 \tag{2.10}$$

atau dalam bentuk faktor, yaitu

$$P_5(x) = (x + 1)(x - 4)(x - 5)(x + 3)(x - 2) \tag{2.11}$$

dengan bentuk faktor akan mudah didapatkan akar dari polinomialnya, seperti Polinomial 2.11 mempunyai akar-akar $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$, $x_4 = -3$, dan $x_5 = 2$. Misalkan didapatkan satu akar yaitu $x + 3$, maka sisa polinomial dengan membagi Polinomial 2.11 dengan $x+3$, hasil baginya adalah polinomial order empat dan sisanya adalah nol, hasil baginya yaitu

$$\begin{aligned} P_4(x) &= (x+1)(x-4)(x-5)(x-2) \quad \text{atau} \\ &= -40 - 2x + 27x^2 - 10x^3 + x^4 \end{aligned}$$



Gambar 2.8: Sketsa Pencarian Akar dengan Metode Secant

Telah dipelajari di bab sebelumnya, yaitu metode Secant, untuk mendapatkan akar dari suatu persamaan dengan menggunakan metode Secant, pendekatan yang dilakukan adalah pendekatan garis lurus yang memotong sumbu-x. Garis lurus tersebut didapat dari dua buah titik pada persamaan, seperti pada Gambar 2.8. Sedangkan metode Mullers menggunakan pendekatan parabola atau persamaan kuadrat yang membutuhkan tiga buah titik pada persamaan tersebut, seperti pada Gambar 2.9.

Metode Mullers membutuhkan tiga buah titik pada persamaan parabola sebagai pendekatan, misal persamaan parabola tersebut adalah

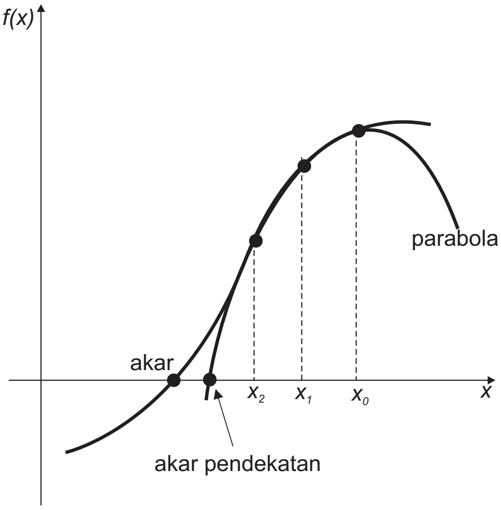
$$f_2(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c \tag{2.12}$$

jika tiga titik tersebut adalah $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, dan $(x_2, f(x_2))$, jika ketiga titik tersebut disubstitusikan ke Persamaan 2.12 didapat

$$f(x_0) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c \tag{2.13}$$
$$f(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c \tag{2.14}$$
$$f(x_2) = a(x_2 - x_2)^2 + b(x_2 - x_2) + c \tag{2.15}$$

Perhatikan Persamaan 2.15, terlihat bahwa $c = f(x_2)$, dan jika disubstitusikan ke Persamaan 2.13 dan 2.14, maka persamaan tersebut menjadi

$$f(x_0) - f(x_2) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) \tag{2.16}$$
$$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) \tag{2.17}$$



Gambar 2.9: Sketsa Pencarian Akar dengan Metode Mullers

dengan menggunakan manipulasi aljabar untuk mendapat koefisien a dan b, dimisalkan

$$h_0 = x_1 - x_0 \qquad \text{dan} \qquad h_1 = x_2 - x_1$$

oleh karena itu

$$\begin{aligned} x_0 - x_2 &= x_0 - x_1 + x_1 - x_2 && (2.18)\\ &= -(x_1 - x_0) - (x_2 - x_1) && (2.19)\\ &= -(h_0 + h_1) \quad \text{dan} && (2.20)\\ x_1 - x_2 &= -h_1 && (2.21) \end{aligned}$$

dan jika

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h_1}\\ h_1\delta_1 &= f(x_2) - f(x_1) \end{aligned}$$

maka

$$f(x_1) - f(x_2) = -h_1\delta_1 \qquad (2.22)$$

dan juga

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_0}\\ h_0\delta_0 &= f(x_1) - f(x_0) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} f(x_0) - f(x_2) &= f(x_0) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2)\\ &= -(f(x_1) - f(x_0)) - (f(x_2) - f(x_1))\\ &= -h_0\delta_0 - h_1\delta_1 && (2.23) \end{aligned}$$

Persamaan 2.20, 2.21, 2.22 dan 2.23 substitusikan ke Persamaan 2.16 dan 2.17, persamaan menjadi

$$
\begin{aligned}
(h_0+h_1)b-(h_0+h_1)^2a &= h_0\delta_0+h_1\delta_1 \\
h_1b-h_1^2a &= h_1\delta_1
\end{aligned}
$$

terlihat bahwa ada dua persamaan dengan dua peubah yang belum diketahui, yaitu a dan b, dengan menggunakan aturan Cramer, dapat dihitung

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\begin{vmatrix} h_0+h_1 & h_o\delta_0+h_1\delta_1 \\ h_1 & h_1\delta_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_0+h_1 & -(h_0+h_1)^2 \\ h_1 & -h_1^2 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{(h_0+h_1)(h_1\delta_1)-h_1(h_o\delta_0+h_1\delta_1)}{(h_0+h_1)h_1^2+h_1(h_o+h_1)^2} \\
&= \frac{h_0h_1(\delta_1-\delta_0)}{h_0h_1(h_1+h_0)} \\
&= \frac{\delta_1-\delta_0}{h_1+h_0}
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{\begin{vmatrix} h_o\delta_0+h_1\delta_1 & -(h_0+h_1)^2 \\ h_1\delta_1 & -h_1^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_0+h_1 & -(h_0+h_1)^2 \\ h_1 & -h_1^2 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{-h_1^2(h_o\delta_0+h_1\delta_1)+h_1\delta_1(h_0+h_1)^2}{(h_0+h_1)h_1^2+h_1(h_o+h_1)^2} \\
&= \frac{h_0h_1(h_1\delta_1-h_1\delta_0+h_1\delta_1+h_0\delta_1)}{h_0h_1(h_1+h_0)} \\
&= \frac{h_1\delta_1-h_1\delta_0+h_1\delta_1+h_0\delta_1}{h_1+h_0} \\
&= \frac{h_1(\delta_1-\delta_0)+\delta_1(h_1+h_0)}{h_1+h_0} \\
&= \frac{h_1(\delta_1-\delta_0)}{h_1+h_0}+\frac{\delta_1(h_1+h_0)}{h_1+h_0} \\
&= ah_1+\delta_1
\end{aligned}
$$

serta

$$c=f(x_2)$$

Oleh karena itu penyelesaian Persamaan 2.12 dan karena $b^2 \gg 4ac$ dan nilai Diskriminan yaitu

$$D=\sqrt{b^2-4ac}$$

maka digunakan alternatif rumus yaitu

$$x_3 - x_2 = \frac{-2c}{b \pm D}$$

nilai x_3 tergantung pada $b \pm D$, jika

$$|b + D| > |b - D| \quad \text{maka} \quad E = |b + D|, \text{sebaliknya } E = |b - D|$$

dan juga tergantung pada tanda dari nilai b, jika b bernilai +

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{E} \tag{2.24}$$

dan jika bertanda $-$, maka

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{-E} \tag{2.25}$$

Untuk lebih jelas, perhatikan Algoritma Mullers berikut,

Algoritma Mullers
Untuk menemukan akar persamaan dari $f(x) = 0$ dengan tiga pendekatan x_0, x_1 dan x_2.
INPUT: x_0, x_1 dan x_2, toleransi TOL, putaran maksimal N_0.
OUTPUT: solusi pendekatan x atau pesan gagal.

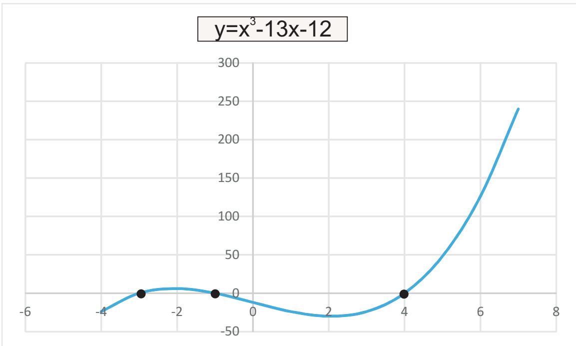
1. Tentukan $i = 3$;
   $h_0 = x_1 - x_0$
   $h_1 = x_2 - x_1$
   $\delta_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_0}$
   $\delta_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h_1}$
2. While $i \leq N_0$ lakukan langkah 3 sampai dengan 7
3. $a = \dfrac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0}$
   $b = ah_1 + \delta_1$
   $c = f(x_2)$; $D = b^2 - 4ac$
4. If $|b - D| < |b + D|$
   then $E = b + D$
   else $E = b - D$
5. Tentukan $h = \dfrac{-2c}{E}$
   $x_3 = x_2 + h$
6. If $|h| < TOL$ then
   OUTPUT(p). (Proses pencarian telah selesai dan ditemukan) STOP.

7. Tentukan $i = i + 1$.
   $x_0 = x_1$;
   $x_1 = x_2$;
   $x_2 = x_3$;
   $h_0 = x_1 - x_0$
   $h_1 = x_2 - x_1$
   $\delta_0 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h_0}$
   $\delta_1 = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{h_1}$
8. OUTPUT ('Metode GAGAL setelah melalui iterasi $N_0 =$',N_0)
   (Proses telah selesai tetapi tidak ditemukan)
   STOP.

Proses bisa juga berhenti, seperti pada Algoritma di atas pada 6, yaitu dengan menghitung

$$\varepsilon = \left|\frac{x_3 - x_2}{x_3}\right| 100\%$$

sekecil mungkin, artinya pada 6, kondisi $|h| < TOL$ bisa digantikan dengan nilai ε yang sangat kecil (sudah ditentukan terlebih dahulu).



Gambar 2.10: Sketsa dari $y = x^3 - 13x - 12$

CONTOH 2.3.1 Gunakan metode Mullers, tentukan mendapatkan akar real dari polinomial order 3 berikut,

$$f(x) = x^3 - 13x - 12$$

dengan akar pendekatannya adalah $x_0 = 4.5$, $x_1 = 5.5$ dan $x_0 = 5$. Diketahui bahwa akar polinomial tersebut adalah $-3, -1$ dan 4, sketsa grafik dari polinomial tersebut seperti pada Gambar 2.10.

Penyelesaian
Untuk mencari akar di sekitar $x = 4$, maka perlu dimisalkan nilai $x_0 = 4.5$, $x_1 = 5.5$ dan $x_2 = 5.0$, kemudian lakukan perhitungan sebagai berikut

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(4.5) = 20.625 \\ f(x_1) &= f(5.5) = 82.875 \\ f(x_2) &= f(5.0) = 48 \end{aligned}$$

kemudian hitung

$$\begin{aligned}
h_0 &= x_1 - x_0 = 5.5 - 4.5 = 1.0 \\
h_1 &= x_2 - x_1 = 5.0 - 5.5 = -0.5 \\
\delta_0 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{82.875 - 20.625}{5.5 - 4.5} = 62.25 \\
\delta_1 &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{48 - 82.875}{5.0 - 5.5} = 69.75
\end{aligned}$$

sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0} = \frac{69.75 - 62.25}{-0.5 + 1} = 15.0 \\
b &= ah_1 + \delta_1 = 15.0(-0.5) + 69.75 = 62.25 \\
c &= f(x_2) = f(5.0) = 48
\end{aligned}$$

Hitung diskriminan, yaitu

$$D = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{62.25^2 - 4 \cdot 15.0 \cdot 48} = 31.54461$$

dan karena

$$|b + D| = |62.25 + 31.54461| > |b - D| = |62.25 - 31.54461|$$

maka

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b + D} = 5.0 + \frac{-2(48)}{62.25 + 31.54461} = 3.976487$$

dan hitung kesalahannya, yaitu

$$\varepsilon = \left|\frac{x_3 - x_2}{x_3}\right| = \left|\frac{3.976487 - 5.0}{3.976487}\right| = \left|\frac{-1.023513}{3.976487}\right| = 25.74\%$$

Oleh karena kesalahannya masih besar, maka ulangi lagi proses dengan memisalkan nilai-nilai

$$x_0 = 5.5 \qquad x_1 = 5.0 \quad \text{dan} \quad x_2 = 3.976487$$

dan hitung

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= f(5.5) = 82.875 \\
f(x_1) &= f(5.0) = 48 \\
f(x_2) &= f(3.976487) = -0.81633
\end{aligned}$$

kemudian hitung

$$\begin{aligned}
h_0 &= x_1 - x_0 = 5.0 - 5.5 = -0.5 \\
h_1 &= x_2 - x_1 = 3.976487 - 5.0 = -1.02351 \\
\delta_0 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{48 - 82.875}{5.0 - 5.5} = 69.75 \\
\delta_1 &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-0.81633 - 48}{3.976487 - 5.0} = 47.69488
\end{aligned}$$

sekarang hiutng

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\delta_1-\delta_0}{h_1+h_0} = \frac{47.69488-69.75}{-1.02351-0.5} = 14.47649 \\
b &= ah_1+\delta_1 = 14.47649(-1.02351)+47.69488 = 32.87801 \\
c &= f(x_2) = f(3.976487) = -0.81633
\end{aligned}
$$

Hitung diskriminan, yaitu

$$D = \sqrt{b^2-4ac} = \sqrt{32.87801^2-4\cdot 14.47649\cdot(-0.81633)} = 33.5892$$

dan karena

$$|b+D| = |62.25+33.5892| > |b-D| = |62.25-33.5892|$$

maka

$$x_3 = x_2+\frac{-2c}{b+D} = 3.976487+\frac{-2(-0.81633)}{32.87801+33.5892} = 4.00105$$

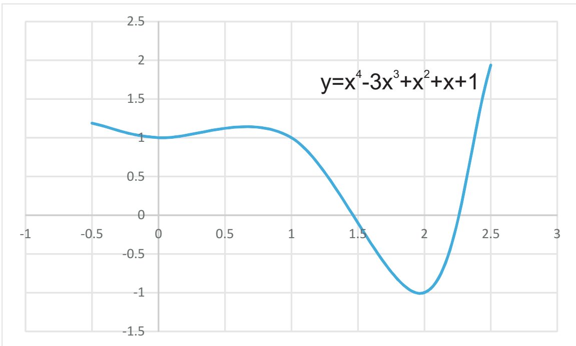
dan hitung kesalahannya, yaitu

$$\varepsilon = \left|\frac{x_3-x_2}{x_3}\right| = \left|\frac{4.00105-3.976487}{4.00105}\right| = \left|\frac{1.02351}{3.977893}\right| = 0.6139\%$$

Jika diteruskan perhitungan akan didapat seperti pada Tabel 2.7. ◀

Tabel 2.7: Pencarian akar dari $f(x) = x^3-13x-12$

n	x_r	$\varepsilon(\%)$
0	5.0	
1	3.976487	25.7391
2	4.001050	0.6139
3	4.000001	0.0262
4	4.000000	0.0000



Gambar 2.11: Sketsa dari $y = x^4-3x^3+x^2+x+1$

Contoh 2.3.2 Dengan menggunakan metode Mullers, carilah akar dari polinomial

$$y = x^4-3x^3+x^2+x+1$$

dengan akar pendekatannya adalah $x_0 = 1.5$, $x_1 = 2.0$ dan $x_2 = 2.5$. Diketahui bahwa akar polinomial tersebut dapat dilihat pada sketsa grafik dari polinomial tersebut seperti pada Gambar 2.11.

Penyelesaian

Dicoba untuk mencari nilai x_3 dengan diketahui $x_0 = 1.5$, $x_1 = 2.0$ dan $x_2 = 2.5$. Hitunglah

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(1.5) = -0.3125 \\ f(x_1) &= f(2.0) = -1.0 \\ f(x_2) &= f(2.5) = 1.9375 \end{aligned}$$

kemudian hitung

$$\begin{aligned} h_0 &= x_1 - x_0 = 2.0 - 1.5 = 0.5 \\ h_1 &= x_2 - x_1 = 2.5 - 2.0 = 0.5 \\ \delta_0 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{-1.0 - (-0.3125)}{2.0 - 1.5} = -1.375 \\ \delta_1 &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1.9375 - (-1)}{2.5 - 2.0} = 5.875 \end{aligned}$$

sekarang hitung

$$\begin{aligned} a &= \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0} = \frac{5.875 - (-1.375)}{0.5 + 0.5} = 7.25 \\ b &= ah_1 + \delta_1 = 7.25(0.5) + 5.875 = 9.5 \\ c &= f(x_2) = f(2.5) = 1.9375 \end{aligned}$$

Hitung diskriminan, yaitu

$$D = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{9.5^2 - 4 \cdot 7.25 \cdot 1.9375} = 5.836309$$

dan karena

$$|b + D| = |5.836309 + 9.5| > |b - D| = |5.836309 - 9.5|$$

maka

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b + D} = 2.5 + \frac{-2(1.9375)}{5.836309 + 9.5} = 2.247332$$

dan hitung kesalahannya, yaitu

$$\varepsilon = \left| \frac{x_3 - x_2}{x_3} \right| = \left| \frac{2.247332 - 2.5}{2.247332} \right| = \left| \frac{-0.25267}{2.247332} \right| = 11.243\%$$

Karena nilai kesalahan masih besar, ulangi proses perhitungan dengan $x_0 = x_1(lama) = 2.0$, $x_1 = x_2(lama) = 2.5$ dan $x_2 = x_3(baru) = 2.247332$
Hitunglah

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(2.0) = -1.0 \\ f(x_1) &= f(2.5) = 1.9375 \\ f(x_2) &= f(2.247332) = -0.24507 \end{aligned}$$

kemudian hitung

$$\begin{aligned}
h_0 &= x_1 - x_0 = 2.5 - 2.0 = 0.5 \\
h_1 &= x_2 - x_1 = 2.247332 - 2.5 = -0.25267 \\
\delta_0 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1.9375 - (-1)}{2.5 - 2.0} = 5.875 \\
\delta_1 &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-0.24507 - 1.9375}{2.247332 - 2.5} = 8.638065
\end{aligned}$$

sekarang hitung

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 + h_0} = \frac{8.638065 - 5.875}{-0.25267 + 0.5} = 11.1715 \\
b &= ah_1 + \delta_1 = 11.1715(-0.25267) + 8.638065 = 5.815381 \\
c &= f(x_2) = f(2.5) = -0.24507
\end{aligned}$$

Hitung diskriminan, yaitu

$$\begin{aligned}
D &= \sqrt{b^2 - 4ac} \\
&= \sqrt{5.815381^2 - 4 \cdot 11.1715 \cdot (-0.24507)} \\
&= 6.691013
\end{aligned}$$

dan karena

$$|b + D| = |5.815381 + 6.691013| > |b - D| = |5.815381 - 6.691013|$$

maka

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b + D} = 2.247332 + \frac{-2(-0.24507)}{5.815381 + 6.691013} = 2.286522$$

dan hitung kesalahannya, yaitu

$$\varepsilon = \left|\frac{x_3 - x_2}{x_3}\right| = \left|\frac{2.286522 - 2.247332}{2.286522}\right| = \left|\frac{0.03919}{2.286522}\right| = 1.7140\%$$

Kerjakan seterusnya dan cocokan hasilnya dengan Tabel 2.8 ◀

Tabel 2.8: Pencarian akar dari $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 1$

n	x_r	$\varepsilon(\%)$
0	2.5	
1	2.247332	11.243
2	2.286522	1.714
3	2.288775	0.0985
4	2.288794994	0.00085

Akhir dari mencari akar polinomial $P_n(x) = 0$ dengan metode Mullers dapat dilakukan dengan tiga nilai pendekatan yaitu x_0, x_1 dan x_2 dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Hitung $P_n(x_0)$, $P_n(x_1)$ dan $P_n(x_2)$
2. Hitung h_0, h_1, δ_0 dan δ_1

3. Hitung a, b dan c

4. Hitung diskriminan D

5. Bandingkan $|D + b|$ dengan $|D - b|$

6. Hitung akar pendekatan x_3

7. Hitung kesalahan, ulangi pertama sampai kesalahan yang diinginkan

---

SOAL-SOAL LATIHAN 2.3

Kerjakan soal-soal berikut ini untuk mengukur tingkat penguasaan Anda atas bahasan yang telah Anda pelajari.

1. Diketahui polinomial $P_5(x) = x^5 + 11x^4 + 21x^3 - 10x^2 - 21x - 5$ carilah salah satu akar dari polinomial tersebut dengan $x_0 = 1.5$, $x_1 = 1.7$ dan $x_2 = 2.1$.

2. Diketahui persamaan $P_4(x) = x^4 - 4x^2 - 3x + 5$ carilah salah satu akar dari polinomial tersebut dengan $x_0 = 0.5$, $x_1 = 0.7$ dan $x_2 = 0.8$.

3. Dengan menggunakan metode Mullers, carilah akar dari polinomial

$$y = x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

dengan $x_0 = 0.5$, $x_1 = 1.0$ dan $x_2 = 1.5$.

4. Dengan menggunakan metode Mullers, carilah akar dari polinomial

$$y = x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$$

dan tentukan sendiri x_0, x_1 dan x_2.

5. Dengan menggunakan metode Mullers, carilah akar dari polinomial

$$y = x^5 - x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 4 = 0$$

dan tentukan sendiri x_0, x_1 dan x_2.

6. Dengan menggunakan metode Mullers, carilah akar dari polinomial

$$y = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5$$

dan tentukan sendiri x_0, x_1 dan x_2.

2.3.2 Metode Bairstow

Metode Bairstow adalah metode iterasi yang digunakan untuk menemukan akar-akar polynomial yang real maupun kompleks. Hal ini didasarkan pada ide pembagian dari polinomial yang diberikan oleh fungsi kuadrat dan dapat digunakan untuk menemukan semua akar dari polinomial. Perhatikan polinomial order n berikut,

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

metode Bairstows membagi dengan polinomial kuadratik yaitu

$$P_2(x) = x^2 - rx - s$$

dan hasil baginya adalah polinomial dengan derajat berkurang dua, yaitu

$$P_{n-2}(x) = b_2 + b_3x + ba_4x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-3} + b_nx^{n-2}$$

dan sisa pembagian adalah polinomial linier, yaitu

$$R(x) = b_1(x - r) + b_0$$

Karena hasil bagi $P_{n-2}(x)$ dan sisanya $R(x)$ yang diperoleh, maka b_i dengan $(i = 0, \ldots, n)$ dapat diperoleh dengan menyamakan

$$\begin{aligned} b_n &= a_n && (2.26)\\ b_{n-1} &= a_{n-1} + rb_n && (2.27)\\ b_i &= a_i + rb_{i+1} + sb_{i+2} \quad \text{untuk} \quad i = n-2, \cdots, 0 && (2.28) \end{aligned}$$

Jika $P_2(x) = x^2 - rx - s$ merupakan faktor dari $P_n(x)$, maka sisanya $R(x)$ adalah nol dan akar real atau kompleks adalah akar dari $P_n(x)$. Dapat dicatat bahwa $x^2 - rx - s$ dipertimbangkan berdasarkan beberapa nilai dugaan untuk r dan s. Jadi, metode Bairstow mengurangi penentuan nilai r dan s sedemikian hingga $R(x)$ adalah nol. Untuk menemukan nilai-nilai seperti itu, metode Bairstow menggunakan strategi yang mirip dengan metode Newton Raphson. Karena b_0 dan b_1 merupakan fungsi dari r dan s, dengan menggunakan deret Taylor, b_0 dan b_1 diekspansikan menjadi

$$\begin{aligned} b_1(r + \triangle r, s + \triangle s) &= b_1 + \frac{\delta_1}{\delta r}\triangle r + \frac{\delta_1}{\delta s}\triangle s + O(\triangle r^2, \triangle s^2)\\ b_0(r + \triangle r, s + \triangle s) &= b_0 + \frac{\delta_0}{\delta r}\triangle r + \frac{\delta_0}{\delta s}\triangle s + O(\triangle r^2, \triangle s^2) \end{aligned}$$

Oleh karena $\triangle s \ll 1$ dan $\triangle r \ll 1$, maka $O(\triangle r^2, \triangle s^2) \approx 0$, order kedua dan yang lebih tinggi dapat diabaikan, sedemikian hingga $(\triangle r, \triangle s)$ dapat menuju ke nilai (r, s), persamaan diatas menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\delta b_1}{\delta r}\triangle r + \frac{\delta b_1}{\delta s}\triangle s &= -b_1 && (2.29)\\ \frac{\delta b_0}{\delta r}\triangle r + \frac{\delta b_0}{\delta s}\triangle s &= -b_0 && (2.30) \end{aligned}$$

diperlukan nilai dari turunan parsial dari b_0, b_1, r dan s. Metode Bairstows menunjukan bahwa turunan parsial dapat ditunjukan dengan pembagian dari $P_n(x)$, dengan menempatkan ulang $a_i's$ dengan $b_i's$ dan $b_i's$ dengan $c_i's$, sehingga

$$\begin{aligned} c_n &= b_n && (2.31)\\ c_{n-1} &= b_{n-1} + rc_n && (2.32)\\ c_i &= b_i + rc_{i+1} + sc_{i+2} \quad \text{untuk} \quad i = n-2 \ sd\ 1 && (2.33) \end{aligned}$$

dengan

$$\frac{\delta b_0}{\delta r} = c_1, \quad \frac{\delta b_0}{\delta s} = \frac{\delta b_1}{\delta r} c_2 \quad \text{dan} \quad \frac{\delta b_1}{\delta s} = c_3$$

Jadi Persamaan 2.29 dan 2.29 dapat ditulis menjadi

$$c_2 \triangle r + c_3 \triangle s = -b_1 \tag{2.34}$$

$$c_1 \triangle r + c_2 \triangle s = -b_0 \tag{2.35}$$

dua persamaan ini dapat ditemukan nilai untuk $(\triangle r, \triangle s)$ dan juga bisa digunakan untuk menemukan nilai pendekatan (r, s) dengan $(r + \triangle r, s + \triangle s)$.

Sekarang dapat dihitung prosentase kesalahan dari (r, s) dengan

$$|\varepsilon_r| = \left| \frac{\triangle r}{r} \right| \times 100\%; \qquad |\varepsilon_s| = \left| \frac{\triangle s}{s} \right| \times 100\%$$

Jika $|\varepsilon_r| > \varepsilon_0$ atau $|\varepsilon_s| > \varepsilon_0$ dengan ε_0 batas kesalahan yang diinginkan, maka ulangi iterasi dengan menemukan nilai awal $(r+\triangle r, s+\triangle s)$. Sebaliknya jika memenuhi batas kesalahan, maka akar polinomial ditemukan dengan

$$x = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4s}}{2} \tag{2.36}$$

Jika ingin menemukan semua akar polinomial dari $P_n(x)$, maka ikuti tiga langkah berikut ini:

1. Jika hasil bagi polinomial $P_{n-2}(x)$ adalah polinomial derajat tiga (atau lebih tinggi), maka dapat diterapkan metode Bairstow ke hasil bagi polinomial. Nilai-nilai sebelumnya dapat berfungsi sebagai nilai awal untuk iterasi berikutnya.

2. Jika hasil bagi polinomial $P_{n-2}(x)$ adalah polinomial derajat dua atau persamaan kuadratik, maka gunakan Persamaan 2.36 untuk menghitungnya.

3. Jika hasil bagi polinomial $P_{n-2}(x)$ adalah polinomial derajat satu atau $ax+b=0$, maka sisanya adalah akar tunggal yaitu

$$x = -\frac{b}{a} \tag{2.37}$$

Perhatikan Algoritma Bairstows berikut ini

Algoritma Bairstows

Untuk menemukan akar polinomial dari $P_n(x) = 0$ dengan nilai awal r, s dan nilai Tol sebagai prosentase kesalahan.

INPUT: polinomial $P_n(x)$, titik awal r dan s, prosentase kesalahan TOL, putaran maksimal N_0.
OUTPUT: solusi pendekatan r dan s atau pesan gagal.

Langkah-1 Tentukan $i = 2$;
$q_0 = f(p_0)$ dan $q_1 = f(p_1)$.

Langkah-2 While $i \leq N_0$ lakukan langkah 3 sampai dengan 6

Langkah-3 Tentukan $p = p_1 - \frac{q_1(p_1-p_0)}{q_1-q_0}$ (Menghitung p_i)

Langkah-4 If $|p - p_1| < TOL$ then
OUTPUT(p). (Proses pencarian telah selesai dan ditemukan) STOP.

Langkah-5 Tentukan $i = i + 1$.

Langkah-6 Tentukan $p_0 = p_1$; (update p_0, q_0, p_1, q_1)
$q_0 = q_1$; $p_1 = p$; dan $q_1 = f(p)$;

Langkah-7 OUTPUT ('Metode GAGAL setelah melalui iterasi N_0 =',N_0)
(Proses telah selesai tetapi tidak ditemukan)
STOP.

Contoh 2.3.3 Dengan menggunakan metode Bairstows, tentukan akar dari

$$P_4(x) = x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4$$

dengan nilai awal $r = 0.5$, $s = -0.5$, dan $\varepsilon = 0.01\%$.

Penyelesaian
Untuk mencari akar polinomial dari

$$P_4(x) = x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4$$

diketahui bahwa

$$a_0 = 4, \quad a_1 = -10, \quad a_2 = 10, \quad a_3 = -5, \quad a_4 = 1$$

dengan menggunakan rumus 2.26, 2.27 dan 2.28, maka

$$\begin{aligned}
b_4 &= a_4 = 1 \\
b_3 &= a_3 + rb_4 \\
&= -5 + (0.5)1 = -4.5 \\
b_2 &= a_2 + rb_3 + sb_4 \\
&= 10 + 0.5(-4.5) + (-0.5)1 = 7.25 \\
b_1 &= a_1 + rb_2 + sb_3 \\
&= -10 + 0.5(7.5) + (-0.5)(-4.5) = -4.125 \\
b_0 &= a_0 + rb_1 + sb_2 \\
&= 4 + 0.5(-4.125) + (-0.5)(7.25) = -1.6875
\end{aligned}$$

dengan menggunakan rumus 2.31, 2.32 dan 2.33, maka

$$
\begin{aligned}
c_4 &= b_4 = 1 \\
c_3 &= b_3 + rc_4 \\
&= -4.5 + 0.5(1) = -4 \\
c_2 &= b_2 + rc_3 + sc_4 \\
&= 7.25 + 0.5(-4) + (-0.5)1 = 4.75 \\
c_1 &= b_1 + rc_2 + sc_3 \\
&= -4.125 + 0.5(4.75) + (-0.5)(-4) = 0.25
\end{aligned}
$$

sekarang mencari atau menghitung $\triangle r$ dan $\triangle s$ dengan menggunakan rumus 2.34 dan 2.35, yaitu

$$
\begin{aligned}
4.75\triangle r - 4\triangle s &= 4.125 \\
0.25\triangle r + 4.75\triangle s &= 1.6875
\end{aligned}
$$

dengan menggunakan aturan Cramer didapat

$$
\triangle r = \frac{\begin{vmatrix} 4.125 & -4 \\ 1.6875 & 4.75 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4.75 & -4 \\ 0.25 & 4.75 \end{vmatrix}} = \frac{26.34375}{23.5625} = 1.1180371
$$

sehingga nilai r yang baru adalah

$$
\begin{aligned}
r_1 &= r_0 + \triangle r \\
&= 0.5 + 1.1180371 \\
&= 1.6180371
\end{aligned}
$$

dan

$$
\triangle s = \frac{\begin{vmatrix} 4.75 & 4.125 \\ 0.25 & 1.6875 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4.75 & -4 \\ 0.25 & 4.75 \end{vmatrix}} = \frac{-9.044688}{23.5625} = 0.296419
$$

dengan demikian nilai s yang baru adalah

$$
\begin{aligned}
s_1 &= s_0 + \triangle s \\
&= -0.5 + 0.296419 \\
&= -0.203581
\end{aligned}
$$

dan kesalahannya adalah

$$
\begin{aligned}
|\varepsilon_r| &= \left|\frac{\triangle r}{r}\right| \times 100\% \\
&= \left|\frac{1.1180371}{1.6180371}\right| \times 100\% \\
&= 69.0984\%
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
|\varepsilon_s| &= \left|\frac{\triangle s}{s}\right| \times 100\% \\
&= \left|\frac{0.296419}{-0.203581}\right| \times 100\% \\
&= 145.6026\%
\end{aligned}
$$

Oleh karena kesalahannya lebih besar dari $\varepsilon = 0.01\%$, maka lakukan iterasi berikutnya, dengan $r = 1.6180371$ dan $s = -0.203581$, yaitu iterasi kedua

$$
\begin{aligned}
b_4 &= a_4 = 1 \\
b_3 &= a_3 + rb_4 \\
&= -5 + (1.6180371)1 = -3.3819629 \\
b_2 &= a_2 + rb_3 + sb_4 \\
&= 10 + 1.6180371(-4.5) + (-0.203581)1 \\
&= 4.3242776 \\
b_1 &= a_1 + rb_2 + sb_3 \\
&= -10 + 1.6180371(7.5) + (-0.203581)(-4.5) \\
&= -2.3146552 \\
b_0 &= a_0 + rb_1 + sb_2 \\
&= 4 + 1.6180371(-4.125) + (-0.203581)(7.25) \\
&= -0.6255384
\end{aligned}
$$

dengan menggunakan rumus 2.31, 2.32 dan 2.33, maka

$$
\begin{aligned}
c_4 &= b_4 = 1 \\
c_3 &= b_3 + rc_4 \\
&= -4.5 + 1.6180371(1) = -1.7639257 \\
c_2 &= b_2 + rc_3 + sc_4 \\
&= 7.25 + 1.6180371(-4) + (-0.203581)1 \\
&= 1.2665994 \\
c_1 &= b_1 + rc_2 + sc_3 \\
&= -4.125 + 1.6180371(4.75) + (-0.203581)(-4) \\
&= 0.0938512
\end{aligned}
$$

sekarang mencari atau menghitung $\triangle r$ dan $\triangle s$ dengan menggunakan rumus 2.34 dan 2.35, yaitu

$$
\begin{aligned}
1.2665994\triangle r - 1.7639257\triangle s &= 2.3146552 \\
0.0938512\triangle r + 1.2665994\triangle s &= 0.6255384
\end{aligned}
$$

dengan menggunakan aturan Cramer didapat

$$\triangle r = \frac{\begin{vmatrix} 2.3146552 & -1.7639257 \\ 0.6255384 & 1.2665994 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.2665994 & -1.7639257 \\ 0.0938512 & 1.2665994 \end{vmatrix}} = \frac{4.035144}{1.769820} = 2.279974$$

dan

$$\triangle s = \frac{\begin{vmatrix} 1.2665994 & 2.3146552 \\ 0.6255384 & 0.6255384 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.2665994 & -1.7639257 \\ 0.0938512 & 1.2665994 \end{vmatrix}} = \frac{0.575073}{1.769820} = 0.324933$$

dengan demikian, maka nilai r dan s yang baru adalah

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 + \triangle r \\ &= 1.618037 + 2.279974 = 3.898011 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} s_2 &= s_1 + \triangle s \\ &= -0.203581 + 0.324933 = 0.121352 \end{aligned}$$

dan kesalahannya adalah

$$\begin{aligned} |\varepsilon_r| &= \left|\frac{\triangle r}{r}\right| \times 100\% \\ &= \left|\frac{2.279974}{3.898011}\right| \times 100\% = 58.4907\% \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} |\varepsilon_s| &= \left|\frac{\triangle s}{s}\right| \times 100\% \\ &= \left|\frac{0.324933}{0.121352}\right| \times 100\% = 267.7602\% \end{aligned}$$

Oleh karena kesalahannya masih lebih besar dari $\varepsilon = 0.01\%$, maka lakukan iterasi berikutnya, yaitu iterasi ketiga dengan $r = 3.898011$ dan $s = 0.121352$

$$\begin{aligned}
b_4 &= a_4 = 1 \\
b_3 &= a_3 + rb_4 \\
&= -5 + (3.898011)1 = -1.101989 \\
b_2 &= a_2 + rb_3 + sb_4 \\
&= 10 + 3.898011(-1.101989) + (0.121352)1 \\
&= 5.825787 \\
b_1 &= a_1 + rb_2 + sb_3 \\
&= -10 + 3.898011(5.825787) + (0.121352)(-1.101989) \\
&= 12.575252 \\
b_0 &= a_0 + rb_1 + sb_2 \\
&= 4 + 3.898011(12.575252) + (0.121352)(5.825787) \\
&= 53.725442
\end{aligned}$$

dengan menggunakan rumus 2.31, 2.32 dan 2.33, maka

$$\begin{aligned}
c_4 &= b_4 = 1 \\
c_3 &= b_3 + rc_4 \\
&= -4.5 + 3.898011(1) = 2.796022
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2 &= b_2 + rc_3 + sc_4 \\
&= 7.25 + 3.898011(2.796022) + (0.121352)1 \\
&= 16.846063 \\
c_1 &= b_1 + rc_2 + sc_3 \\
&= -4.125 + 3.898011(16.846063) + (0.121352)(2.796022) \\
&= 78.580693
\end{aligned}$$

sekarang mencari atau menghitung $\triangle r$ dan $\triangle s$ dengan menggunakan rumus 2.34 dan 2.35, yaitu

$$\begin{aligned}
16.846063\triangle r + 2.796022\triangle s &= -12.575252 \\
78.580693\triangle r + 16.846063\triangle s &= -53.725442
\end{aligned}$$

dengan menggunakan aturan Cramer didapat

$$\triangle r = \frac{\begin{vmatrix} -12.575252 & -1.7639257 \\ -53.725442 & 16.846063 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 16.846063 & -1.7639257 \\ 78.580693 & 16.846063 \end{vmatrix}} = \frac{-61.625975}{64.076502} = -0.961756$$

dan

$$\triangle s = \frac{\begin{vmatrix} 16.846063 & -12.575252 \\ 78.580693 & -53.725442 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 16.846063 & -1.7639257 \\ 78.580693 & 16.846063 \end{vmatrix}} = \frac{83.109832}{64.076502} = 1.297041$$

dengan demikian, maka nilai r dan s yang baru adalah

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 + \triangle r \\ &= 3.898011 + -0.961756 \\ &= 2.936255 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} s_2 &= s_1 + \triangle s \\ &= 0.121352 + 1.297041 \\ &= c \end{aligned}$$

dan kesalahannya adalah

$$\begin{aligned} |\varepsilon_r| &= \left|\frac{\triangle r}{r}\right| \times 100\% \\ &= \left|\frac{-0.961756}{2.936255}\right| \times 100\% \\ &= 32.7545\% \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} |\varepsilon_s| &= \left|\frac{\triangle s}{s}\right| \times 100\% \\ &= \left|\frac{1.297041}{1.297041}\right| \times 100\% \\ &= 91.4444\% \end{aligned}$$

nilai kesalahan masih cukup besar, jika dilanjutkan pada iterasi keempat dan seterusnya dapat dicocokan pada Tabel 2.9

Tabel 2.9: Pencarian akar polinomial $P_4(x) = x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4$

X	4	5	6	7	8	9
b_0	19.843821	4.832528	0.928258	0.039478	-0.006316	0.000059
b_1	2.807339	0.564803	0.006971	-0.076448	-0.012940	-0.000108
b_2	5.358711	3.628081	2.674780	2.185340	2.019546	2.000275
b_3	-2.063745	-2.212733	-2.216374	-2.116861	-2.016060	-2.000191
b_4	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
c_0	31.466624	14.453409	7.975467	6.348052	6.867220	6.998754
c_1	9.339014	5.025018	3.098135	2.683169	2.942990	2.999402
c_2	0.872509	0.574533	0.567252	0.766277	0.967880	0.999617
c_3	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
r	2.787267	2.783626	2.883139	2.98394	2.999809	3.000000
s	-0.204441	-1.155663	-1.711455	-1.964652	-1.999534	-2.000000
ε_r	5.3453%	0.1308%	3.4515%	3.3781%	0.5290%	0.0064%
ε_s	793.7900%	82.3096%	32.4748%	12.8876%	1.7445%	0.0233%

dan pada iterasi kesembilan, kesalahan cukup kecil dan ditemukan nilai $r = 3.0$ dan $s = -2.0$, sehingga dengan rumus di atas akar dari polinomial adalah

$$\begin{aligned} x &= \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4s}}{2} \\ &= \frac{3.0 \pm \sqrt{3.0^2 + 4(-2.0)}}{2} \end{aligned}$$

sehingga

$$x_1 = 2 \qquad \text{dan} \qquad x_2 = 1$$

jika $P_4(x) = x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4$ dibagi dengan persamaan kuadrat $(x-1)(x-2)$ hasilnya adalah persamaan kuadrat yaitu

$$P_2(x) = x^2 - 2x + 2$$

dan akar dari persamaan tersebut dengan menggunakan rumus ABC adalah

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} \\ x_1 &= 1 + i \\ x_2 &= 1 - i \end{aligned}$$

Oleh karena itu akar-akar polinomial dari $P_4(x) = x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4$ adalah

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 1 + i \\ x_4 &= 1 - i \end{aligned}$$

◀

Contoh 2.3.4 Dengan menggunakan metode Bairstows, carilah akar-akar polinomial $P_5(x) = x^5 - 3.5x^4 + 2.75x^3 + 2.125x^2 - 3.875x + 1.25 = 0$ dengan nilai awal $r = -1$ dan $s = -1$ serta $\varepsilon = 1\%$.

Penyelesaian

Diketahui $P_5(x) = x^5 - 3.5x^4 + 2.75x^3 + 2.125x^2 - 3.875x + 1.25 = 0$ dan $r = -1$ dan $s = -1$ serta $\varepsilon = 1\%$. Langkah pertama adalah menentukan

$$a_0 = 1.25,\ a_1 = -3.875,\ a_2 = 2.125,\ a_3 = 2.75,\ a_4 = -3.5,\ a_5 = 1$$

dengan menggunakan rumus 2.26, 2.27 dan 2.28, maka

$$
\begin{aligned}
b_5 &= a_5 = 1 \\
b_4 &= a_4 + rb_5 \\
&= -3.5 + (-1)1 = -4.5 \\
b_3 &= a_3 + rb_4 + sb_5 \\
&= 2.75 + (-1)(-4.5) + (-1)1 = 6.25 \\
b_2 &= a_2 + rb_3 + sb_4 \\
&= 2.125 + (-1)(6.25) + (-1)(-4.5) = 0.375 \\
b_1 &= a_1 + rb_2 + sb_3 \\
&= -3.875 + (-1)(0.375) + (-1)(6.25) = -10.5 \\
b_0 &= a_0 + rb_1 + sb_2 \\
&= 1.25 + (-1)(-10.5) + (-1)(0.375) = -11.375
\end{aligned}
$$

dengan menggunakan rumus 2.31, 2.32 dan 2.33, maka

$$
\begin{aligned}
c_5 &= b_5 = 1 \\
c_4 &= b_4 + rc_5 \\
&= -4.5 + (-1)(1) = -5.5 \\
c_3 &= b_3 + rc_4 + sc_5 \\
&= 6.25 + (-1)(-5.5) + (-1)(1) = 10.75 \\
c_2 &= b_2 + rc_3 + sc_4 \\
&= 0.375 + (-1)(10.75) + (-1)(-5.5) = -4.875 \\
c_1 &= b_1 + rc_2 + sc_3 \\
&= -10.5 + (-1)(-4.875) + (-1)(10.75) = -16.375
\end{aligned}
$$

sekarang mencari atau menghitung $\triangle r$ dan $\triangle s$ dengan menggunakan rumus 2.34 dan 2.35, yaitu

$$
\begin{aligned}
-4.875\triangle r + 10.75\triangle s &= 10.5 \\
-16.375\triangle r - 4.875\triangle s &= 11.375
\end{aligned}
$$

dengan menggunakan aturan Cramer didapat

$$
\triangle r = \frac{\begin{vmatrix} 10.5 & 10.75 \\ 11.375 & -4.875 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4.875 & 10.75 \\ -16.375 & -4.875 \end{vmatrix}} = \frac{26.34375}{23.5625} = 1.1180371
$$

dan

$$
\triangle s = \frac{\begin{vmatrix} -4.875 & 10.5 \\ -16.375 & 11.375 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4.875 & 10.75 \\ -16.375 & -4.875 \end{vmatrix}} = \frac{71.09375}{199.79688} = 0.35583
$$

dengan demikian, maka nilai r dan s yang baru adalah

$$
\begin{aligned}
r_1 &= r_0 + \triangle r \\
&= -1 + 0.35583 \\
&= -0.64417
\end{aligned}
$$

dan

$$\begin{aligned} s_1 &= s_0 + \triangle s \\ &= -1 + 1.13811 \\ &= 0.13811 \end{aligned}$$

dan kesalahannya adalah

$$\begin{aligned} |\varepsilon_r| &= \left|\frac{\triangle r}{r}\right| \times 100\% \\ &= \left|\frac{0.35583}{0.64417}\right| \times 100\% \\ &= 55.2386\% \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} |\varepsilon_s| &= \left|\frac{\triangle s}{s}\right| \times 100\% \\ &= \left|\frac{1.13811}{0.13811}\right| \times 100\% \\ &= 824.066\% \end{aligned}$$

Oleh karena kesalahannya lebih besar dari $\varepsilon = 1\%$, maka lakukan iterasi berikutnya, dengan $r = -0.64417$ dan $s = 0.13811$, kemudian cocokkan dengan Tabel 2.10

Tabel 2.10: Pencarian akar polinomial $P_5(x) = x^5 - 3.5x^4 + 2.75x^3 + 2.125x^2 - 3.875x + 1.25$

X	1	2	3	4
b_0	11.37500	2.13042	0.17252	0.00086
b_1	-10.50000	-1.80143	-0.14598	-0.00112
b_2	0.37500	-2.02742	-2.45265	-2.49840
b_3	6.25000	5.55766	5.26987	5.24879
b_4	-4.50000	-4.14417	-4.01111	-3.99969
b_5	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
c_0	-16.37500	4.78662	8.07834	8.36895
c_1	-4.87500	-8.34472	-8.69185	-8.74513
c_2	10.75000	8.78027	8.05097	7.99727
c_3	-5.50000	-4.78834	-4.52223	-4.49937
c_4	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
r	-0.64417	-0.51111	-0.49969	-0.50000
s	0.13811	0.46973	0.50020	0.50000
ε_r	-55.2386%	-26.0327%	-2.2868%	0.0627%
ε_s	824.066%	70.5984%	6.09127%	-0.0405%

Pada Tabel 2.10, terlihat pada putaran ke-empat, nilai ε_r maupun ε_s lebih kecil dari 1%, sehingga ditemukan nilai $r = -0.5$ dan $s = 0.5$, oleh karena itu

$$\begin{aligned} x &= \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4s}}{2} \\ &= \frac{-0.5 \pm \sqrt{(-0.5)^2 + 4(0.5)}}{2} \\ x_1 &= 0.5 \\ x_2 &= -1.0 \end{aligned}$$

Jika $P_5(x) = x^5 - 3.5x^4 + 2.75x^3 + 2.125x^2 - 3.875x + 1.25$ dibagi dengan persamaan kuadrat $(x - 0.5)(x + 1)$ hasilnya adalah persamaan kuadrat yaitu

$$P_3(x) = x^3 - 4x^2 + 5.25x - 2.5$$

karena polinomial masih berderajat tiga, lakukan pencarian akar dengan

$$a = -2.5, \quad a_1 = 5.25, \quad a_2 = -4, \quad a_3 = 1$$

dan dengan nilai awal $r = -0.5$ dan $s = 0.5$ didapatkan seperti pada Tabel 2.11 dan

Tabel 2.11: Pencarian akar polinomial $P_5(x) = x^3 - 4x^2 + 5.25x - 2.5$

X	1	2	3	4	5	6
b_0	-8.7	-2.171642	0.677311	0.137621	0.009231	-2.07E-05
b_1	8	4.982462	0.004486	0.054404	0.008871	5.50E-05
b_2	-4.5	-2.26786	-2.334836	-2.101589	-2.007402	-1.999983
b_3	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
c_1	11	7.715242	-2.468256	-1.537227	-1.2618099	-1.249824
c_2	-5	-0.535714	-0.669672	-0.203178	-0.014804	3.31E-05
c_3	1	1	1	1	1	1
r	1.732143	1.665164	1.898411	1.992598	2.000016	2.0
s	3.660714	-1.357629	-1.205916	-1.241184	-1.249945	-1.25
ε_r	128.866%	4.022%	12.286%	4.727%	0.371%	0.001%
ε_s	86.341%	369.640%	12.581%	2.841%	0.701%	0.004%

hasilnya adalah $r = 2$ dan $s = -1.25$, sehingga

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4(-1.25)}}{2} \\ x_3 &= \frac{2 + \sqrt{2^2 + 4(-1.25)}}{2} = 1 + 0.5i \\ x_4 &= \frac{2 - \sqrt{2^2 + 4(-1.25)}}{2} = 1 - 0.5i \end{aligned}$$

dan sisanya adalah persamaan linier, yaitu

$$x - 2 = 0$$

dengan menggunakan Persamaan 2.37

$$x_5 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2$$

◀

Untuk mencari akar polinomial $P_n(x) = 0$ dengan pendekatan dapat dilakukan dengan menggunakan metode Bairstow, yaitu salah satu mencari akar real maupun akar yang imajiner.

Metode Bairstow menggunakan pendekatan polinomial dibagi oleh persamaan kuadrat, hasil dari pembagian tersebut jika merupakan polinomial dengan derajat lebih dari dua, maka dilakukan proses ulang seperti sebelumnya, sebaliknya derajat polinomial kuadratik atau linear akan mudah didapat akarnya. Untuk mencari persamaan kuadrat pembagi diperlukan dua titik sebarang yang dinamakan dengan titik r dan s. Proses akan selesai jika kesalahan dari r maupun s sekecil mungkin dengan akar persamaan kuadrat adalah

$$x = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4s}}{2}$$

SOAL-SOAL LATIHAN 2.3

Kerjakan soal-soal berikut ini untuk mengukur tingkat penguasaan Anda atas bahasan yang telah dipelajari.

1. Diketahui polinomial

$$P_3(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5$$

   dengan nilai awal $r_0 = 1.0$ dan $s_0 = -0.5$ serta $|\varepsilon| < 0.01\%$. Carilah akar-akarnya?

2. Carilah akar-akar dari polinomial berikut

$$P_4(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$$

   dengan nilai awal $r = 0.75$, $s = -0.5$ dan $|\varepsilon| < 0.01\%$?

3. Dengan menggunakan metode Bairstows, carilah akar-akar polinomial

$$P_4(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$$

   dengan nilai awal $r = 0.5$ dan $s = 0.5$ serta $\varepsilon = 1\%$.

4. Dengan menggunakan metode Bairstows, carilah akar-akar polinomial

$$P_4(x) = x^4 - 3x^3 + 20x^2 + 44x + 54 = 0$$

   dengan nilai awal $r = 2$ dan $s = 2$ serta $\varepsilon = 1\%$.

5. Dengan menggunakan metode Bairstows, carilah akar-akar polinomial

$$P_4(x) = x^4 - 2x^3 + 60x^2 - 2x + 5$$

   dengan nilai awal tentukan sendiri.

Bab 3

Sistem Persamaan Linear

Persamaan garis dengan koordinat kartesian, ditulis

$$ax + by = c, \qquad a \text{ dan } b \neq 0 \tag{3.1}$$

maka akan ada sejumlah pasangan titik-titik (x, y) sebagai penyelesaian. Begitu juga persamaan bidang dengan koordinat kartesian, ditulis

$$ax + by + cz = d, \qquad a, b, \text{dan } c \neq 0 \tag{3.2}$$

maka akan ada sejumlah pasangan titik-titik (x, y, z) sebagai penyelesaian. Sedangkan persamaan linear pada dimensi n dengan peubah x_1, x_2, $\ldots$, x_n dapat ditulis

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = b \tag{3.3}$$

dengan a_1, a_2, $\ldots$, a_n adalah konstanta dengan tidak semuanya nol, maka akan ada sejumlah pasangan titik-titik $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sebagai penyelesaiannya. Untuk $n = 2$

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b$$

sama seperti Persamaan 3.1 dan untuk $n = 3$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$$

sama seperti Persamaan 3.2. Dan jika $b = 0$, persamaan tersebut dinamakan persamaan homogin, seperti

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

Sedangkan sistem persamaan linear adalah sistem yang terdiri dari beberapa persamaan linear, seperti

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

adalah sistem persamaan linear yang terdiri dari dua persamaan linear dengan dua peubah bebas yaitu x_1 dan x_2. Dan sistem persamaan linear di bawah ini

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

adalah sistem persamaan linear dengan tiga peubah bebas yaitu x_1, x_2, dan x_3. Sedangkan sistem persamaan linear dengan m persamaan linear dan n peubah bebas adalah

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut, sudah dijelaskan pada mata kuliah Aljabar Linear dengan berbagai metode, antara lain: metode Gauss, metode Gauss-Jordan, metode Invers dan lain sebagainya. Pada modul ini akan dijelaskan metode-metode selain metode yang ada di Aljabar Linear.

Pada bab ini akan dibahas penyelesaian sistem persamaan linear dengan metode numerik, yaitu metode Jacobi, metode Gauss-Seidel dan metode komposisi LU.

3.1 Metode Jacobi

Metode Jacobi merupakan salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Metode Jacobi adalah metode iterasi yang konvergen sehingga setiap persamaan harus diubah sedemikian hingga koefisien-koefisien nilai mutlaknya paling besar satu.

Metode iterasi Jacobi untuk menyelesaikan sistem persamaan linear **Ax=b** yang dimulai dengan nilai pendekatan awal $\mathbf{x}^0$ untuk mendapatkan nilai $\mathbf{x}$ dan mendapatkan barisan vektor $\{\mathbf{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ yang konvergen ke $\mathbf{x}$.

Untuk mendapat penyelesaian sistem persamaan linear **Ax=b** untuk x_i dengan $a_{ii} \neq 0$, diusahakan koefisien dari x_i mempunyai nilai terbesar, yaitu

$$x_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left(-\frac{a_{ij}\ x_j}{a_{ii}} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

Untuk setiap $k \geq 1$, secara umum $x_i^{(k)}$ dari $\mathbf{x}^{(k)}$ didapat dari $\mathbf{x}^{(k-1)}$ dengan

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left(-a_{ij}\ x_j^{(k-1)} \right) + b_i \right], \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3.4}$$

Contoh 3.1.1 Diberikan sistem persamaan linear $Ax = b$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 && (3.5) \\
-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 && (3.6) \\
2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11 && (3.7) \\
3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15 && (3.8)
\end{aligned}$$

Selesaikan sistem persamaan linear tersebut dengan menggunakan metode iterasi Jacobi apabila diketahui nilai pendekatan awal $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$ dan sampai nilai

$$\frac{|\ x^{(k)} - x^{(k-1)}\ |}{|\ x^{(k)}\ |} < 10^{-3}, \qquad \forall \mathbf{x} \in X$$

Penyelesaian

Dari sistem persamaan linier di atas dan menggunakan Persamaan 3.4 dengan $i = 1, 2, 3, 4$ diperoleh sistem persamaan linear sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{10}(x_2 - 2x_3 + 6) \\
x_2 &= \frac{1}{11}(x_1 + x_3 - 3x_4 + 25) \\
x_3 &= \frac{1}{10}(-2x_1 + x_2 + x_4 - 11) \\
x_4 &= \frac{1}{8}(-3x_2 + x_3 + 15)
\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5} \\
x_2 &= \frac{1}{11}x_1 + \frac{1}{11}x_3 - \frac{3}{11}x_4 + \frac{25}{11} \\
x_3 &= -\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{10}x_4 - \frac{11}{10} \\
x_4 &= -\frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_3 + \frac{15}{8}
\end{aligned}$$

atau dengan menggunakan indeks iterasi

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{10}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} + \frac{3}{5} \\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{11}x_1^{(k)} + \frac{1}{11}x_3^{(k)} - \frac{3}{11}x_4^{(k)} + \frac{25}{11} \\
x_3^{(k+1)} &= -\frac{1}{5}x_1^{(k)} + \frac{1}{10}x_2^{(k)} + \frac{1}{10}x_4^{(k)} - \frac{11}{10} \\
x_4^{(k+1)} &= -\frac{3}{8}x_2^{(k)} + \frac{1}{8}x_3^{(k)} + \frac{15}{8}
\end{aligned}$$

dengan nlai pendekatan awal $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$, maka $\mathbf{x}^{(1)}$, adalah

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{10}x_2^{(0)} - \frac{1}{5}x_3^{(0)} + \frac{3}{5} \\
&= \frac{1}{10}(0) - \frac{1}{5}(0) + \frac{3}{5} = 0.6000 \\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{11}x_1^{(0)} + \frac{1}{11}x_3^{(0)} - \frac{3}{11}x_4^{(0)} + \frac{25}{11} \\
&= \frac{1}{11}(0) + \frac{1}{11}(0) - \frac{3}{11}(0) + \frac{25}{11} = 2.2727 \\
x_3^{(1)} &= -\frac{1}{5}x_1^{(0)} + \frac{1}{10}x_2^{(0)} + \frac{1}{10}x_4^{(0)} - \frac{11}{10} \\
&= -\frac{1}{5}(0) + \frac{1}{10}(0) + \frac{1}{10}(0) - \frac{11}{10} = -1.1000 \\
x_4^{(1)} &= -\frac{3}{8}x_2^{(0)} + \frac{1}{8}x_3^{(0)} + \frac{15}{8} \\
&= -\frac{3}{8}(0) + \frac{1}{8}(0) + \frac{15}{8} = 1.8750
\end{aligned}$$

maka nilai dari $\mathbf{x}^{(1)} = (0.6, 2.2727, -1.10, 1.875)^t$. Untuk mendapatkan nilai iterasi berikutnya, yaitu

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= \frac{1}{10}x_2^{(1)} - \frac{1}{5}x_3^{(1)} \quad + \frac{3}{5} \\
&= \frac{1}{10}(2.2727) - \frac{1}{5}(-1.1) \quad + \frac{3}{5} = 1.0473 \\
x_2^{(2)} &= \frac{1}{11}x_1^{(1)} + \frac{1}{11}x_3^{(1)} - \frac{3}{11}x_4^{(1)} + \frac{25}{11} \\
&= \frac{1}{11}(0.6) + \frac{1}{11}(-1.1) - \frac{3}{11}(1.875) + \frac{25}{11} = 1.7159 \\
x_3^{(2)} &= -\frac{1}{5}x_1^{(1)} + \frac{1}{10}x_2^{(1)} + \frac{1}{10}x_4^{(1)} - \frac{11}{10} \\
&= -\frac{1}{5}(0.6) + \frac{1}{10}(2.2727) + \frac{1}{10}(1.875) - \frac{11}{10} = -0.8052 \\
x_4^{(2)} &= -\frac{3}{8}x_2^{(1)} + \frac{1}{8}x_3^{(1)} \quad + \frac{15}{8} \\
&= -\frac{3}{8}(0.6) + \frac{1}{8}(2.2727) + \frac{15}{8} = 0.8852
\end{aligned}$$

maka nilai dari $\mathbf{x}^{(2)} = (1.0473, 1.7159, -0.8052, 0.8852)^t$, dengan menggunakan rumus iterasi $\mathbf{x}^{(k+1)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, x_4^{(k)}\right)^t$, maka hasil iterasi tersebut adalah

Tabel 3.1: Hasil iterasi dari sistem persamaan linear

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$gal_1^{(k)}$	$gal_2^{(k)}$	$gal_3^{(k)}$	$gal_4^{(k)}$
0	0	0	0	0				
1	0.6000	2.2727	-1.1000	1.8750	1.0	1.0	1.0	1.0
2	1.0473	1.7159	-0.8052	0.8852	0.42708	0.32450	0.36607	1.11810
3	0.9326	2.0533	-1.0493	1.1309	0.12292	0.16432	0.23264	0.21722
4	1.0152	1.9537	-0.9681	0.9738	0.08133	0.05099	0.08391	0.16126
5	0.9890	2.0114	-1.0103	1.0214	0.02650	0.02870	0.04175	0.04651
6	1.0032	1.9922	-0.9945	0.9944	0.01416	0.00962	0.01585	0.02707
7	0.9981	2.0023	-1.0020	1.0036	0.00508	0.00503	0.00744	0.00913
8	1.0006	1.9987	-0.9990	0.9989	0.00250	0.00182	0.00294	0.00471
9	0.9997	2.0004	-1.0004	1.0006	0.00095	0.00089	0.00133	0.00173
10	1.0001	1.9998	-0.9998	0.9998	0.00044	0.00034	0.00054	0.00083
11	0.9999	2.0001	-1.0001	1.0001	0.00018	0.00016	0.00024	0.00032

iterasi perhitungan selesai pada iterasi ke-11, sebab

$$\frac{\mid x^{(11)} - x^{(10)} \mid}{\mid x^{(11)} \mid} = \frac{\mid 0,9998 - 1.0001 \mid}{\mid 1.0001 \mid} = 0.00032 < 10^{-3}$$

sehingga nilai yang memenuhi persamaan linear di atas dengan nilai pembulatan adalah $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$ dan $x_4 = 1$. ■

◀

Secara umum, teknik iterasi dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem linier $Ax = b$ kedalam sistem yang berbentuk $x = Tx + c$ untuk matriks T dan vektor c

tertentu. Setelah dipilih vektor awal $x^{(0)}$, solusi vektor yang berikutnya dapat didekati melalui perhitungan sebagai berikut:

$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$$

untuk $k = 1, 2, 3, \cdots$.

Diketahui sistem persamaan linear

$$Ax = b$$

jika matriks A diuraikan seperti

$$A = D - L - U$$

dengan D adalah matriks diagonal, dengan elemen diagonalnya adalah elemen pada matriks A, $-L$ adalah matriks segitiga bawah dari matriks A, dan $-U$ adalah matriks segitiga atas dari matriks A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriks A tersebut dapat dituliskan ulang sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= D - L - U \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ (D - L - U)\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ D\mathbf{x} - (L + U)\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ D\mathbf{x} &= (L + U)\mathbf{x} + \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= D^{-1}(L + U)\ \mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= T\mathbf{x} + \mathbf{c} \end{aligned}$$

perhatikan contoh di atas yang diselesaikan dengan manggunakan matriks T.

Contoh 3.1.2 Diberikan sistem persamaan linear $Ax = b$, seperti contoh sebelumnya, dengan

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15 \end{aligned}$$

selesaikan dengan menggunakan

$$\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$$

Penyelesaian
Dari sistem persamaan linier di atas dan menggunakan Persamaan 3.4 dengan $i = 1, 2, 3, 4$ diperoleh diperoleh sistem persamaan linear sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{10}(x_2 - 2x_3 + 6) \\
x_2 &= \frac{1}{11}(x_1 + x_3 - 3x_4 + 25) \\
x_3 &= \frac{1}{10}(-2x_1 + x_2 + x_4 - 11) \\
x_4 &= \frac{1}{8}(-3x_2 + x_3 + 15)
\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0x_1 + \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{5}x_3 + 0x_4 + \frac{3}{5} \\
x_2 &= \frac{1}{11}x_1 + 0x_2 + \frac{1}{11}x_3 - \frac{3}{11}x_4 + \frac{25}{11} \\
x_3 &= -\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + 0x_3 + \frac{1}{10}x_4 - \frac{11}{10} \\
x_4 &= -\frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_3 + 0x_4 + \frac{15}{8}
\end{aligned}$$

dengan sistem persamaan linear tersebut dapat dibentuk matriks

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{25}{11} \\ -\frac{11}{10} \\ \frac{15}{8} \end{pmatrix}$$

dan dengan nlai pendekatan awal $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$, maka

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}^{(0)} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{25}{11} \\ -\frac{11}{10} \\ \frac{15}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6000 \\ 2.2727 \\ -1.1000 \\ 1.8750 \end{pmatrix}$$

didapatkan $\mathbf{x}^{(1)} = (0.6000, 2.2727, -1.1000, 1.8750)^t$, sedangkan iterasi kedua adalah

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}^{(1)} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{25}{11} \\ -\frac{11}{10} \\ \frac{15}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0473 \\ 1.7159 \\ -0.8052 \\ 0.8852 \end{pmatrix}$$

jika dilanjutkan iterasinya sampai dengan batas galatnya, maka hasil lengkapnya sesuai dengan Tabel 3.1. ◀

Algoritma Iterasi Jacobi
Untuk menyelesaikan $Ax = b$ dengan aproksimasi nilai awal $x^{(0)}$.
INPUT: Sejumlah n persamaan; elemen a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ dari matriks A; elemen b_i, $1 \leq i \leq n$ dan $XO = x^{(0)}$; toleransi TOL; jumlah iterasi maksimum N.
OUTPUT: solusi pendekatan $x_1, \cdots, x_n$ atau pesan jumlah iterasi telah terlampaui.

Langkah-1 Tetapkan nilai $k = 1$.

Langkah-2 While ($k \leq N$) lakukan langkah 3 sampai dengan 6

Langkah-3 For $i = 1, \cdots, n$
set $x_i = \frac{1}{a_{ii}}[-\sum_{j=1,j\neq i}^{n}(a_{ij}XO_j) + b_i]$.

Langkah-4 If $\|x - XO\| < TOL$ then OUTPUT $(x_1, \cdots, x_n)$;
(Langkah sukses.)
STOP.

Langkah-5 Tetapkan $k = k + 1$.

Langkah-6 Untuk $i = 1, \cdots, n$ set $XO_i = x_i$.

Langkah-7 OUTPUT ('Jumlah maksimum iterasi telah terlampaui);
(Prosedur sukses.)
STOP.

Langkah ketiga pada algoritma iterasi Jacobi memerlukan nilai $a_{ii} \neq 0$, untuk $i = 1, 2, \cdots, n$. Jika terdapat nilai $a_{ii} = 0$, maka sistem bersifat nonsingular. Untuk mempercepat konvergensi, persamaan dapat diatur sedemikian sehingga a_{ii} bernilai sebesar mungkin.
Kriteria lain untuk menyelesaikan kriteria yang diperlukan pada langkah 4 adalah melakukan iterasi hingga

$$\frac{\mid x^{(k)} - x^{(k-1)} \mid}{\mid x^{(k)} \mid} < TOL$$

bernilai kurang dari toleransi yang telah diberikan.

SOAL-SOAL LATIHAN 3.1

Untuk lebih memahami materi yang telah diuraikan di atas, kerjakanlah soal-soal latihan berikut ini!

1. Dengan menggunakan metode Jacobi, tentukan nilai x_1, x_2 dan x_3 dari sistem persamaan linier berikut, dengan $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 4$$
$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 21$$
$$3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 30$$

2. Dengan menggunakan metode Jacobi, selesaikan sistem persamaan linier berikut hingga iterasi ketiga, dengan $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned} 10x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4 &= 15 \\ -x_1 - x_2 + 10x_3 - 2x_4 &= 27 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 10x_4 &= -9 \end{aligned}$$

3. Dengan menggunakan metode Jacobi, selesaikan sistem persamaan linier berikut hingga iterasi ketiga, dengan $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + x_3 &= 16 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 7 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 &= 16 \end{aligned}$$

4. Dengan menggunakan metode Jacobi, selesaikan sistem persamaan linier berikut hingga iterasi ketiga, dengan $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15 \end{aligned}$$

3.2 Metode Gauss-Seidel

Metode Gauss-Seidel digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear (SPL) berukuran besar dan proporsi koefisien nolnya besar, seperti sistem-sistem yang banyak ditemukan dalam sistem persamaan diferensial. Metode iterasi Gauss-Seidel dikembangkan dari gagasan metode iterasi pada solusi persamaan tak linier. Dengan metode iterasi Gauss-Seidel, kesalahan pembulatan dapat diperkecil karena dapat meneruskan iterasi sampai solusinya seteliti mungkin sesuai dengan batas toleransi error yang diperbolehkan. Kelemahan dari metode ini adalah masalah pivot (titik tengah) yang benar-benar harus diperhatikan karena penyusunan yang salah akan menyebabkan iterasi menjadi divergen dan tidak diperoleh hasil yang benar. Untuk memilih pivot pada sistem persamaan linier, untuk peubah pertama, misal x_1, pilihlah koefisien dari x_1 yang paling besar diantara persamaan linier-persamaan linier yang ada, berikutnya pilih koefisien untuk peubah berikutnya dari persamaan yang belum terpilih.

Diberikan sistem persamaan linier yang terdiri dari n persamaan dan n peubah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Sistem persamaan linier tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk perkalian matriks $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Penyelesaian dengan metode Gauss-Seidel analog dengan Metode Jacobi, hanya saja nilai yang didapatkan dari perhitungan langsung disubstitusi kedalam persamaan tanpa menunggu satu iterasi selesai sehingga SPL dapat disusun kembali sebagai berikut:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} \tag{3.9}$$

untuk $k = 0, 1, 2, \cdots$ dan $i = 1, 2, \cdots, n$.

Contoh 3.2.1 Diberikan sistem persamaan linear $Ax = b$ dengan

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15 \end{aligned}$$

dengan menggunakan metode iterasi Gauss-Seidel dengan nilai pendekatan awal $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$ dan sampai nilai

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|}{\|\mathbf{x}^{(k)}\|} < 10^{-3}$$

Penyelesaian

Dari sistem persamaan linier di atas dan menggunakan Persamaan 3.9 dengan $i = 1, 2, 3, 4$ diperoleh diperoleh sistem persamaan linear sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{10}(x_2 - 2x_3 + 6) \\ x_2 &= \frac{1}{11}(x_1 + x_3 - 3x_4 + 25) \\ x_3 &= \frac{1}{10}(-2x_1 + x_2 + x_4 - 11) \\ x_4 &= \frac{1}{8}(-3x_2 + x_3 + 15) \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5} \\ x_2 &= \frac{1}{11}x_1 + \frac{1}{11}x_3 - \frac{3}{11}x_4 + \frac{25}{11} \\ x_3 &= -\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{10}x_4 - \frac{11}{10} \\ x_4 &= -\frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_3 + \frac{15}{8} \end{aligned}$$

dengan nilai pendekatan awal $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$, maka $\mathbf{x}^{(1)}$, adalah

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{10}x_2^{(0)} - \frac{1}{5}x_3^{(0)} + \frac{3}{5} \\ &= \frac{1}{10}0 - \frac{1}{5}0 + \frac{3}{5} = 0.6000 \end{aligned}$$

Pada metode Gauss-Seidel, sedikit berbeda dengan metode Jacobi, pada saat $x_1^{(1)}$ sudah ditemukan, maka nilai tersebut sudah digunakan pada iterasi berikutnya, yaitu

$$\begin{aligned} x_2^{(1)} &= \frac{1}{11}x_1^{(1)} + \frac{1}{11}x_3^{(0)} - \frac{3}{11}x_4^{(0)} + \frac{25}{11} \\ &= \frac{1}{11}0.6000 + \frac{1}{11}0 - \frac{3}{11}0 + \frac{25}{11} = 2.3273 \end{aligned}$$

dan pada saat $x_2^{(1)}$ juga sudah ditemukan, maka nilai-nilai tersebut juga digunakan pada iterasi berikutnya, yaitu

$$\begin{aligned} x_3^{(1)} &= -\frac{1}{5}x_1^{(1)} + \frac{1}{10}x_2^{(1)} + \frac{1}{10}x_4^{(0)} - \frac{11}{10} \\ &= -\frac{1}{5}0.6000 + \frac{1}{10}2.3273 + \frac{1}{10}0 - \frac{11}{10} = -0.9873 \end{aligned}$$

dan pada saat $x_3^{(1)}$ juga sudah ditemukan, maka nilai-nilai tersebut juga digunakan pada iterasi berikutnya, yaitu

$$\begin{aligned} x_4^{(1)} &= -\frac{3}{8}x_2^{(1)} + \frac{1}{8}x_3^{(1)} \quad + \frac{15}{8} \\ &= -\frac{3}{8}2.3273 - \frac{1}{8}9.9873 \quad + \frac{15}{8} = 0.8789 \end{aligned}$$

perhatikan indeks atas dari setiap peubahnya, dan hasil iterasi berikutnya adalah

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{1}{10}x_2^{(1)} - \frac{1}{5}x_3^{(1)} \quad + \frac{3}{5} \\ &= \frac{1}{10}2.3273 + \frac{1}{5}0.9873 \quad + \frac{3}{5} = 1.0302 \\ x_2^{(2)} &= \frac{1}{11}x_1^{(2)} + \frac{1}{11}x_3^{(1)} - \frac{3}{11}x_4^{(1)} + \frac{25}{11} \\ &= \frac{1}{11}1.0302 - \frac{1}{11}0.9873 - \frac{3}{11}0.8789 + \frac{25}{11} = 2.0369 \\ x_3^{(2)} &= -\frac{1}{5}x_1^{(2)} + \frac{1}{10}x_2^{(2)} + \frac{1}{10}x_4^{(1)} - \frac{11}{10} \\ &= -\frac{1}{5}1.0302 + \frac{1}{10}2.0369 + \frac{1}{10}0.8789 - \frac{11}{10} = -1.0145 \\ x_4^{(2)} &= -\frac{3}{8}x_2^{(2)} + \frac{1}{8}x_3^{(2)} \quad + \frac{15}{8} \\ &= -\frac{3}{8}2.0369 + \frac{1}{8}1.0145 \quad + \frac{15}{8} = 0.9843 \end{aligned}$$

perhatikan indeks atas dari setiap peubahnya, dan hasil iterasi seluruhnya dapat dilihat pada Tabel 3.2.
iterasi perhitungan selesai pada iterasi ke-5, sebab

$$\frac{\|x^{(5)} - x^{(4)}\|}{\|x^{(5)}\|} = \frac{1,0009 - 1.0001}{1.0001} = 0.00077 < 10^{-3}$$

sehingga nilai yang memenuhi persamaan linear di atas dengan nilai pembulatan adalah $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$ dan $x_4 = 1$. ◀

Dengan memperhatikan contoh di atas, maka perhatikan Algoritma Gauss-Seidel berikut ini:

Tabel 3.2: Hasil iterasi dari sistem persamaan linear

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$gal_1^{(k)}$	$gal_2^{(k)}$	$gal_3^{(k)}$	$gal_4^{(k)}$
0	0	0	0	0				
1	0.6000	2.3273	-0.9873	0.8789	1.0	1.0	1.0	1.0
2	1.0302	2.0369	-1.0145	0.9843	0.41758	0.14253	0.02680	0.10716
3	1.0066	2.0036	-1.0025	0.9984	0.02344	0.01666	0.01190	0.01403
4	1.0009	2.0003	-1.0003	0.9998	0.00572	0.00163	0.00222	0.00150
5	1.0001	2.0000	-1.0000	1.0000	0.00077	0.00014	0.00028	0.00014

Algoritma Gauss-Seidel
Untuk menyelesaikan $Ax = b$ jika diberikan nilai aproksimasi awal $x^{(0)}$.

INPUT: Sejumlah n persamaan yang tidak diketahui; nilai elemen a_{ij} untuk $1 \leq i, j \leq n$ pada matriks $\mathbf{A}$; nilai elemen b_i untuk $1 \leq i \leq n$ dari matriks $\mathbf{b}$; nilai elemen XO_i untuk $1 \leq i \leq n$, dimana $XO = x^{(0)}$; toleransi TOL; jumlah maksimum iterasi (N).
OUTPUT: solusi pendekatan $x_1, \cdots, x_n$ atau pesan bahwa jumlah iterasi telah terlampaui.

Langkah-1 $k = 1$.

Langkah-2 While $(k \leq N)$ lakukan langkah 3 sampai dengan 6

Langkah-3 For $i = 1, 2, \cdots, n$
set $x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} XO_j + b_i \right]$

Langkah-4 If $\|x - XO\| < TOL$ then
OUTPUT $(x_1, \cdots, x_n)$. (Proses sukses) STOP.

Langkah-5 Set $k = k + 1$.

Langkah-6 For $i = 1, \cdots, n$ set $XO_i = x_i$.

Langkah-7 OUTPUT ('Jumlah iterasi maksimum telah terlampaui');
(Proses sukses)
STOP.

Supaya lebih jelas menyelesaikan sistem persamaan linear, perahtikan contoh di bawah ini

Contoh 3.2.2 Dengan menggunakan metode Gauss-Seidel, selesaikan sistem persamaan linear berikut.

$$
\begin{aligned}
4x_1 - x_2 + x_3 &= 7 && (3.10)\\
4x_1 - 8x_2 + x_3 &= -21 && (3.11)\\
-2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 15 && (3.12)
\end{aligned}
$$

Penyelesaian
Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan metode Gauss-Seidel ikuti langkah-langkah berikut:

1. Menentukan titik pivot
   Untuk menentukan pivot, carilah koefisien dari setiap peubah yang paling besar, misal peubah x_1 dari ketiga persamaan, ternyata Persamaan 3.10 dan 3.11 mempunyai koefisien yang paling besar, pilih salah satu, misal dipilih Persamaan 3.10 sebagai pivot. Kemudian pilih pivot untuk x_2, karena Persamaan 3.10 sudah digunakan, maka persamaan yang diperhatikan adalah sisa persamaan yang belum digunakan, yaitu Persamaan 3.11 dan 3.12, dari kedua persamaan tersebut pivot terbesar adalah pada Persamaan 3.11, sehingga sisa persamaan adalah untuk pivot x_3, sehingga sistem persamaan linear di atas menjadi

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4}(x_2 - x_3 + 7) \\ x_2 &= \frac{1}{8}(4x_1 + x_3 + 21) \\ x_3 &= \frac{1}{5}(2x_1 - x_2 + 15) \end{aligned}$$

   atau

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.25x_2 - 0.25x_3 + 1.75 \\ x_2 &= 0.5x_1 + 0.125x_3 + 2.625 \\ x_3 &= 0.4x_1 - 0.2x_2 + 3 \end{aligned}$$

   atau dengan menggunakan indeks iterasi, sistem persamaan linear menjadi

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= 0.25x_2^{(k-1)} - 0.25x_3^{(k-1)} + 1.75 \\ x_2^{(k)} &= 0.5x_1^{(k)} + 0.125x_3^{(k-1)} + 2.625 \\ x_3^{(k)} &= 0.4x_1^{(k)} - 0.2x_2^{(k)} + 3 \end{aligned}$$

   dengan $k = 1, 2, 3, \ldots$

2. Diberikan nilai awal $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$.

3. Proses perhitungan

   a. Iterasi 1

   - Substitusikan $x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$, diperoleh:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 0.25x_2^{(0)} - 0.25x_3^{(0)} + 1.75 \\ &= 0.25(0) - 0.25(0) + 1.75 \\ &= 1.75 \end{aligned}$$

   - Substitusikan $x_1^{(1)} = 1.75$, dan $x_3^{(0)} = 0$, diperoleh:

$$\begin{aligned} x_2^{(1)} &= 0.5x_1^{(1)} + 0.125x_3^{(0)} + 2.625 \\ &= 0.5(1.75) + 0.125(0) + 2.625 \\ &= 3.5 \end{aligned}$$

- Substitusikan $x_1^{(1)} = 1.75$, dan $x_2^{(1)} = 3.5$, diperoleh:

$$\begin{aligned} x_3^{(1)} &= 0.4x_1^{(1)} - 0.2x_2^{(1)} + 3 \\ &= 0.4(1.75) - 0.2(3.5) + 3 \\ &= 3.0 \end{aligned}$$

- Galat/Error :

$$\begin{aligned} |\epsilon_a|_{1,\%} &= \left|\frac{1.75 - 0}{1.75}\right| \times 100\% = 100\% \\ |\epsilon_a|_{2,\%} &= \left|\frac{3.50 - 0}{3.50}\right| \times 100\% = 100\% \\ |\epsilon_a|_{3,\%} &= \left|\frac{3.00 - 0}{3.00}\right| \times 100\% = 100\% \end{aligned}$$

b. Iterasi 2

- Substitusikan $x_2^{(1)} = 3.5$, dan $x_3^{(1)} = 3$, diperoleh:

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= 0.25x_2^{(1)} - 0.25x_3^{(1)} + 1.75 \\ &= 0.25(3.5) - 0.25(3.0) + 1.75 \\ &= 1.875 \end{aligned}$$

- Substitusikan $x_1^{(2)} = 1.875$, dan $x_3^{(1)} = 3$, diperoleh:

$$\begin{aligned} x_2^{(2)} &= 0.5x_1^{(2)} + 0.125x_3^{(1)} + 2.625 \\ &= 0.5(1.875) + 0.125(3.0) + 2.625 \\ &= 3.9375 \end{aligned}$$

- Substitusikan $x_1^{(2)} = 1.875$, dan $x_2^{(2)} = 3.9375$, diperoleh:

$$\begin{aligned} x_3^{(2)} &= 0.4x_1^{(2)} - 0.2x_2^{(2)} + 3 \\ &= 0.4(1.875) - 0.2(3.9375) + 3 \\ &= 2.9625 \end{aligned}$$

- Galat/Error :

$$\begin{aligned} |\epsilon_a|_{1,\%} &= \left|\frac{1.875 - 1.75}{1.875}\right| \times 100\% = 6.667\% \\ |\epsilon_a|_{2,\%} &= \left|\frac{3.938 - 3.5}{3.938}\right| \times 100\% = 11.111\% \\ |\epsilon_a|_{3,\%} &= \left|\frac{2.963 - 3}{2.963}\right| \times 100\% = 1.266\% \end{aligned}$$

c. Iterasi 3

- Substitusikan $x_2^{(2)} = 3.9375$, dan $x_3^{(2)} = 2.9625$, diperoleh:

$$\begin{aligned} x_1^{(3)} &= 0.25x_2^{(2)} - 0.25x_3^{(2} + 1.75 \\ &= 0.25(3.9375) - 0.25(2.9625) + 1.75 \\ &= 1.9938 \end{aligned}$$

- Substitusikan $x_1^{(3)} = 1.9938$, dan $x_3^{(2)} = 2.963$, diperoleh:

$$\begin{aligned} x_2^{(3)} &= 0.5x_1^{(3)} + 0.125x_3^{(2)} + 2.625 \\ &= 0.5(1.9938) + 0.125(2.9625) + 2.625 \\ &= 3.9922 \end{aligned}$$

- Substitusikan $x_1^{(3)} = 1.9938$, dan $x_2^{(3)} = 3.9922$, diperoleh:

$$\begin{aligned} x_3^{(3)} &= 0.4x_1^{(3)} - 0.2x_2^{(3)} + 3 \\ &= 0.4(1.9938) - 0.2(3.9922) + 3 \\ &= 2.9991 \end{aligned}$$

- Galat/Error :

$$|\epsilon_a|_{1,\%} = |\frac{1.9938 - 1.875}{1.9938}| \times 100\% = 5.956\%$$
$$|\epsilon_a|_{2,\%} = |\frac{3.9922 - 3.938}{3.9922}| \times 100\% = 1.370\%$$
$$|\epsilon_a|_{3,\%} = |\frac{2.9991 - 2.963}{2.9991}| \times 100\% = 1.219\%$$

4. Lakukan iterasi selanjutnya dengan cara yang sama. Iterasi berhenti ketika diperoleh error yang mendekati 0%.

5. Berikut ini merupakan tabel penyelesaian SPL dengan metode Gauss-Seidel.

perhatikan indeks atas dari setiap peubahnya, dan hasil iterasi seluruhnya adalah

Tabel 3.3: Hasil iterasi dari sistem persamaan linear

k	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(k)}$	0	1.7500	1.8750	1.9938	1.9983	1.9999
$x_2^{(k)}$	0	3.5000	3.9375	3.9922	3.9990	3.9999
$x_3^{(k)}$	0	3.0000	2.9625	2.9991	2.9995	3.0000

iterasi perhitungan selesai pada iterasi ke-5, sebab

$$\frac{\|x_1^{(5)} - x_1^{(4)}\|}{\|x_1^{(5)}\|} = \frac{1,9999 - 1.9983}{1.99991} \times 100\% = 0.08\%$$

sehingga nilai yang memenuhi persamaan linear di atas dengan nilai pembulatan adalah $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, dan $x_3 = 3$. ◀

SOAL-SOAL LATIHAN 3.2

Untuk lebih memahami materi yang telah diuraikan di atas, kerjakanlah soal-soal latihan berikut ini!

1. Dengan menggunakan metode Gauss-Seidel, tentukan nilai x_1, x_2 dan x_3 dari sistem persamaan linier berikut, dengan $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 21 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 30 \end{aligned}$$

   dengan toleransi kurang dari 10^{-3}.

2. Dengan menggunakan metode Gauss-Seidel, selesaikan sistem persamaan linier berikut hingga iterasi ketiga, dengan $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned} 10x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4 &= 15 \\ -x_1 - x_2 + 10x_3 - 2x_4 &= 27 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 10x_4 &= -9 \end{aligned}$$

   dengan galat kurang dari 0.1%.

3. Dengan menggunakan metode Gauss-Seidel, selesaikan sistem persamaan linier berikut hingga iterasi ketiga, dengan $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{3}{2} \\ x_1 + x_2 - x_3 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

   dengan galat kurang dari 0.1%.

4. Dengan menggunakan metode Gauss-Seidel, selesaikan sistem persamaan linier berikut hingga iterasi ketiga, dengan $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15 \end{aligned}$$

   dengan galat kurang dari 0.1%.

3.3 Dekomposisi *LU*

Cara lain untuk menyelesaiakan sistem persamaan linear, disamping dua metode sebelumnya adalah metode dekompisisi LU. Metode dekomposisi LU yaitu suatu metode mendekomposisi matrik A menjadi dua matriks yangberbeda yaitu matriks segitiga atas (matriks U, dari kata *Upper*) dan matriks segitiga bawah (matriks L, dari kata *Lower*). Ada dua metode dekomposisi LU, yaitu metode dekomposisi LU Doolitle dan metode dekomposisi LU Crout.

Diberikan sistem persamaan linear

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{3.13}$$

dengan A adalah matriks berukuran $n \times n$, $\mathbf{x}$ adalah vektor kolom dengan ukuran $n \times 1$ dan $\mathbf{b}$ adalah vektor kolom dengan ukuran $n \times 1$. Metode dekomposisi LU, adalah proses mengeliminasi matriks A menjadi LU. Dari Persamaan 3.13,

$$\begin{aligned} A\,\mathbf{x} &= \mathbf{b}, && A \text{ didekomposisi menjadi } LU \\ L\,U\,\mathbf{x} &= \mathbf{b}, && \text{jika } \mathbf{y} = U\,\mathbf{x}, \text{ maka} \\ L\,\mathbf{y} &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut, langkah pertama yang dilakukan adalah mencari $\mathbf{y}$ dari

$$L\,\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

kemudian ditemukan $\mathbf{x}$ dari

$$U\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut ini

CONTOH 3.3.1 Diketahui sistem persamaan linear berikut

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 6x_1 - 6x_2 + 7x_3 &= -7 \\ 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= -6 \end{aligned}$$

selesaikan dengan menggunakan metode dekomposisi LU.

Penyelesaian

Sistem persamaan linear di atas, jika ditulis dalam matriks $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, adalah

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & 7 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

misal sudah ditemukan matrik L dan U, sehingga

$$A = LU$$

atau

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & 7 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

maka

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

atau

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

dari perkalian matriks tersebut didapat

$$\begin{aligned} y_1 &= -1 \\ -2y_1 + y_2 &= -7 \\ -y_1 + y_2 + y_3 &= -6 \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} y_1 &= -1 \\ y_2 &= 2y_1 - 7 = -9 \\ y_3 &= y_1 - y_2 - 6 = 2 \end{aligned}$$

sehingga $\mathbf{y} = (-1 \quad -7 \quad -6)^t$. Sekarang mencari $\mathbf{x}$ dengan menggunakan

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

atau

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dari perkalian matriks tersebut didapat

$$\begin{aligned} -2x_3 &= 2 \\ -2x_2 + 5x_3 &= -9 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} -2x_3 &= 2 \\ -2x_2 &= -5x_3 - 9 \\ -3x_1 &= -2x_1 + x_2 - 1 \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} x_3 &= -1 \\ x_2 &= 2 \\ x_1 &= 2 \end{aligned}$$

sehingga $\mathbf{x} = (2 \;\; 2 \quad -1)^t$. ◀

3.3.1 Metode Dekomposisi LU Doolitle

Sekarang bagaimana mendekomposisi matriks A menjadi matriks LU. Untuk mendekomposisi matriks A menjadi matrik L dan U harus dilakukan Operasi Baris Elementer pada matriks A sehingga menjadi matriks U, sedangkan untuk mendapatkan matriks L didapat dari perkalian invers matriks elementer dari operasi yang dilakukan pada saat mencari matriks U. Perbedaan antara dekomposisi LU Doolittle dengan dekomposisi LU Crout, hanya pada diagonal dari matriks L atau matriks U. Jika matriks A didekomposisi LU Doolittle, maka diagonal dari matriks L adalah 1 atau $[l_{ii}] = 1$, sedangkan didekomposisi LU Crout, diagonal dari matriks U yang 1 atau $[u_{ii}] = 1$. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.3.2 Dekomposisikan matriks A menjadi matriks LU Doolittle dengan matriks A adalah

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & 7 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian

Untuk mendapatkan matriks U dari A, harus dilakukan operasi baris elementer supaya matriks A menjadi matriks U. Supaya bilangan enam di baris ke-dua dan kolom pertama menjadi "0", maka operasi baris elementernya adalah **baris kedua ditambah dua kali baris pertama**, sehingga hasilnya adalah

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & 7 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

operasi berikutnya adalah **baris ketiga ditambah sekali baris pertama**, sehingga hasilnya adalah

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & 7 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

operasi yang terakhir adalah **baris ketiga dikurangi dengan baris kedua**, sehingga hasilnya adalah

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

matriks yang terakhir adalah matriks U, yaitu

$$U = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Sedangkan untuk matriks L, harus diingat operasi baris elementer di atas. Matriks L didapat dari perkalian matriks invers dari matriks elementer yang dibangun oleh operasi baris elementer di atas. Matriks elementer didapat dari satu operasi baris elementer terhadap matriks satuan.

Operasi yang pertama adalah **baris kedua ditambah dua kali baris pertama**, inversnya adalah **baris kedua dikurangi dua kali baris pertama**, sehingga

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_1$$

Operasi yang kedua adalah **baris ketiga ditambah sekali baris pertama**, inversnya adalah **baris ketiga dikurangi sekali baris pertama**, sehingga

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

dan operasi yang ketiga adalah **baris ketiga dikurangi dengan baris kedua**, inversnya adalah **baris ketiga ditambah baris kedua**, sehingga

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

dan $L = E_1\ E_2\ E_3$ atau

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jadi

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad U = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

sesuai dengan matriks L dan U di Contoh 3.3.1. ◀

Sekarang perhatikan Algoritma Dekomposisi LU Doolitle

Algoritma Dekomposisi LU Doolittle
Diberikan matriks berukuran $n \times n$, $A[a_{ij}]$, dengan $A = L\,U$, dimana $L = [l_{ij}]$ matriks segitiga bawah dan $U = [u_{ij}]$ matriks segitiga atas, Diagonal utama dari L seluruhnya berisi elemen 1.

INPUT : Matriks A, elemen a_{ij} untuk $i, j = 1, 2, \cdots, n$;
diagonal $l_{ii} = 1$ dari matriks L.
OUTPUT : Matriks L dengan elemen l_{ij} dan matriks U dengan elemen u_{ij}
dengan $i, j = 1, 2, 3, \cdots, n$.

Langkah-1 Pilih $l_{11} = 1$ dan u_{11} yang memenuhi $l_{11}u_{11} = a_{11}$ atau $u_{11} = a_{11}$.
Jika $l_{11}u_{11} = 0$, maka OUTPUT ('Faktorisasi tidak mungkin ada');
STOP.

Langkah-2 Untuk $j = 2, \cdots, n$, $u_{1j} = a_{1j}/l_{11}$; (Baris pertama U.)
Untuk $j = 2, \cdots, n$, $l_{j1} = a_{j1}/u_{11}$; (Kolom pertama L.)

Langkah-3 Untuk $i = 2, \cdots, n-1$ lakukan Langkah 4 dan 5.

Langkah-4 Pilih l_{ii} dan u_{ii} yang memenuhi $l_{ii}u_{ii} = a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{ki}$.
Jika $l_{ii}u_{ii} = 0$ maka OUTPUT ('Faktorisasi tidak mungkin terjadi');
STOP.

Langkah-5 For $j = i+1, \cdots, n$
$u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}[a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}]$; (baris ke-i dari U)
$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}}[a_{ji} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki}]$; (kolom ke-i dari L)

Langkah-6 Pilih l_{nn} dan u_{nn} yang memenuhi $l_{nn}u_{nn} = a_{nn} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn}$.
(Catatan: Jika $l_{nn}u_{nn} = 0$ maka A=LU tetapi A matriks singular).

Langkah-7 OUTPUT (l_{ij} untuk $j = 1, \cdots, i$ dan $i = 1, \cdots, n$);
OUTPUT (u_{ij} untuk $j = 1, \cdots, n$ dan $i = 1, \cdots, n$);
STOP.

Contoh 3.3.3 Dekomposisikan matriks A menjadi matriks LU dengan matriks A adalah

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & 7 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

dengan menggunakan algoritma Dekomposisi LU Doolittle di atas.

Penyelesaian

Matriks A berukuran 3×3, sehingga ukuran matriks L maupun U juga berukuran 3×3.

Langkah-1 karena menggunakan algoritma dekomposisi Doolittle, maka $l_{11} = l_{22} = l_{33} = 1$ dan $u_{11} = a_{11} = -3$

Langkah-2 $u_{12} = a_{12} = 2$ dan $u_{13} = a_{13} = -1$
$l_{21} = a_{21}/u_{11} = 6/(-3) = -2$, dan $l_{31} = a_{31}/u_{11} = 3/(-3) = -1$

Langkah-3 untuk $i = 2, 3$

Langkah-4 $u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = -6 - (-2)(2) = -2$

Langkah-5 $u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 7 - (-2)(-1) = 5$
$l_{32} = 1/u_{22}\,(a_{32} - l_{31}u_{12}) = 1/(-2)\,(-4 - (-1)(2)) = 1$

sehingga

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad U = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

◀

Matriks L dan U yang didapat sesuai dengan Contoh 3.3.2

SOAL-SOAL LATIHAN 3.3

Untuk lebih memahami materi yang telah diuraikan di atas, kerjakanlah soal-soal latihan berikut ini!

1. Dengan menggunakan metode Dekomposisi LU Doolittle, tentukan nilai x_1, x_2 dan x_3 dari sistem persamaan linier berikut.

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 21 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 30 \end{aligned}$$

2. Dengan menggunakan metode Dekomposisi LU Doolittle, tentukan nilai x_1, x_2, x_3 dan x_4 dari sistem persamaan linier berikut.

$$\begin{aligned} 10x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4 &= 15 \\ -x_1 - x_2 + 10x_3 - 2x_4 &= 27 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 10x_4 &= -9 \end{aligned}$$

3. Dengan menggunakan metode Dekomposisi LU Doolittle, tentukan nilai x_1, x_2, dan x_3 dari sistem persamaan linier berikut.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 17 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 22 \end{aligned}$$

4. Dengan menggunakan metode Dekomposisi LU Doolittle, tentukan nilai x_1, x_2, dan x_3 dari sistem persamaan linier berikut.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1 \\ -1x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

3.3.2 Metode Dekomposisi LU Crout

Telah dijelaskan di atas, yaitu Metode Dekompisisi LU Doolittle, bahwa perbedaan antara Doolittle dan Crout hanya pada diagonal dari matriks L dan matriks U. Pada kegiatan belajar ini, akan dijelaskan metode dekomposisi LU Crout, yaitu metode yang mendekomposisi matriks A menjadi matriks L dan matriks U, dengan diagonal dari matriks U adalah 1 atau $[u_{ii}] = 1$.

Akan digunakan contoh yang sama dengan tujuan supaya dapat membedakan kedua metode tersebut.

Contoh 3.3.4 Selesaikan sistem persamaan linear dibawah ini dengan metode dekomposisi LU Crout, jika diketahui sistem persamaan linear berikut

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 6x_1 - 6x_2 + 7x_3 &= -7 \\ 3x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Penyelesaian
Sistem persamaan linear di atas, jika ditulis dalam matriks $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, adalah

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & 7 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Dekomposisikan matriks A menjadi matriks LU Crout dengan matriks A adalah

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & 7 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Untuk mendapatkan matriks U dari A, harus dilakukan operasi baris elementer supaya matriks A menjadi matriks U. Supaya bilangan enam di baris ke-dua dan kolom pertama menjadi "0", maka operasi baris elementernya adalah **baris kedua ditambah dua kali baris pertama**, sehingga hasilnya adalah

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & 7 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

operasi berikutnya adalah **baris ketiga ditambah sekali baris pertama**, sehingga hasilnya adalah

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & 7 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

operasi yang terakhir adalah **baris ketiga dikurangi dengan baris kedua**, sehingga hasilnya adalah

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

karena diagonal matriks U dengan metode dekomposisi Crout harus 1, maka operasi berikutnya adalah **mengalikan baris pertama dengan** $-\frac{1}{3}$, kemudian **mengalikan baris kedua dengan** $-\frac{1}{2}$ dan yang terakhir adalah **mengalikan baris ketiga dengan** $-\frac{1}{2}$, sehingga hasilnya adalah matriks U, yaitu

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sedangkan untuk matriks L, harus diingat operasi baris elementer di atas. Matriks L didapat dari perkalian matriks invers dari matriks elementer yang dibangun oleh operasi baris elementer di atas. Matriks elementer didapat dari satu operasi baris elementer terhadap matriks satuan.

Operasi yang pertama adalah **baris kedua ditambah dua kali baris pertama**, inversnya adalah **baris kedua dikurangi dua kali baris pertama**, sehingga

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_1$$

Operasi yang kedua adalah **baris ketiga ditambah sekali baris pertama**, inversnya adalah **baris ketiga dikurangi sekali baris pertama**, sehingga

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

operasi yang ketiga adalah **baris ketiga dikurangi dengan baris kedua**, inversnya adalah **baris ketiga ditambah baris kedua**, sehingga

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

operasi yang keempat adalah **mengalikan baris pertama dengan** $-\frac{1}{3}$, inversnya adalah **mengalikan baris pertama dengan** -3, sehingga

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4$$

operasi yang kelima adalah **mengalikan baris kedua dengan** $-\frac{1}{2}$, inversnya adalah **mengalikan baris kedua dengan** -2, sehingga

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_5$$

dan yang terakhir adalah operasi yang keenam adalah **mengalikan baris ketiga dengan** $-\frac{1}{2}$, inversnya adalah **mengalikan baris ketiga dengan** -2, sehingga

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = E_6$$

dan $L_1 = E_1\ E_2\ E_3$ atau

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dan $L_2 = E_4\ E_5\ E_6$ atau

$$L_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Jadi

$$L = L_1 L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

sehingga

$$L = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sekarang perhatikan, bahwa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dan $A = LU$, sehingga

$$A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

dengan memisalkan $y = U\mathbf{x}$, maka akan dihitung $\mathbf{y}$ dari

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

atau

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

dari perkalian matriks tersebut didapat

$$\begin{aligned} -3y_1 &= -1 \\ y_1 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} 6y_1 - 2y_2 &= -7 \\ 2y_2 &= 6y_1 + 7 \\ y_2 &= \frac{1}{2}(2 + 7) \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

serta

$$\begin{aligned} 3y_1 - 2y_2 - 2y_3 &= -6 \\ 2y_3 &= 3y_1 - 2y_2 + 6 \\ y_3 &= \frac{1}{2}(1 - 9 + 6) \\ &= -1 \end{aligned}$$

maka $\mathbf{y} = (\frac{1}{3} \;\; \frac{9}{2} - 1)^t$, sehingga

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

dan dihitung $\mathbf{x}$, yaitu

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{9}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

dengan mangalikan matriks tersebut didapat

$$x_3 = -1$$

dan

$$\begin{aligned} x_2 - \frac{5}{2}x_3 &= \frac{9}{2} \\ x_2 &= \frac{5}{2}x_3 + \frac{9}{2} \\ &= -\frac{5}{2} + \frac{9}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

serta

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= \frac{1}{3} \\ x_1 &= \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

jadi penyelesaian dari sistem persamaan linearnya adalah $\mathbf{x} = (2 \;\; 2 \;\; -1)^t$. ◀

Perhatikan Algoritma Dekomposisi LU Crout

Algoritma Dekomposisi LU Crout

Diberikan matriks berukuran $n \times n$, $A[a_{ij}]$, dengan $A = L\,U$, dimana $L = [l_{ij}]$ matriks segitiga bawah dan $U = [u_{ij}]$ matriks segitiga atas, Diagonal utama dari U seluruhnya berisi elemen 1.

INPUT	: Matriks A, elemen a_{ij} untuk $i, j = 1, 2, \cdots, n$;
	: diagonal $l_{ii} = 1$ dari matriks L.
OUTPUT	: Matriks L dengan elemen l_{ij} dan matriks U dengan elemen u_{ij}
	: dengan $i, j = 1, 2, 3, \cdots, n$.

Langkah-1 $u_{11} = 1$ sehingga $l_{11}u_{11} = a_{11}$ atau $l_{11} = a_{11}$.
Jika $l_{11}u_{11} = 0$, maka OUTPUT ('Faktorisasi tidak mungkin ada');
STOP.

Langkah-2 Untuk $j = 2, \cdots, n$, $u_{1j} = a_{1j}/l_{11}$; (Baris pertama U.)
Untuk $j = 2, \cdots, n$, $l_{j1} = a_{j1}/u_{11}$; (Kolom pertama L.)

Langkah-3 Untuk $i = 2, \cdots, n-1$ lakukan Langkah 4 dan 5.

Langkah-4 Pilih l_{ii} dan u_{ii} yang memenuhi $l_{ii}u_{ii} = a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{ki}$.
Jika $l_{ii}u_{ii} = 0$ maka OUTPUT ('Faktorisasi tidak mungkin terjadi'); STOP.

Langkah-5 For $j = i+1, \cdots, n$
$u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}[a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}]$; (baris ke-i dari U)
$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}}[a_{ji} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki}]$; (kolom ke-i dari L)

Langkah-6 Pilih l_{nn} dan u_{nn} yang memenuhi $l_{nn}u_{nn} = a_{nn} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn}$.
(Catatan: Jika $l_{nn}u_{nn} = 0$ maka A=LU tetapi A matriks singular).

Langkah-7 OUTPUT (l_{ij} untuk $j = 1, \cdots, i$ dan $i = 1, \cdots, n$);
OUTPUT (u_{ij} untuk $j = 1, \cdots, n$ dan $i = 1, \cdots, n$);
STOP.

Contoh 3.3.5 Dekomposisikan matriks A menjadi matriks LU dengan matriks A adalah

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & 7 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

dengan menggunakan algoritma Dekomposisi LU Crout di atas.

Penyelesaian

Matriks A berukuran 3×3, sehingga ukuran matriks L maupun U juga berukuran 3×3.

Langkah-1 karena menggunakan algoritma dekomposisi Crout, maka $u_{11} = u_{22} = u_{33} = 1$ dan $l_{11} = a_{11} = -3$

Langkah-2 $u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = -\frac{2}{3}$ dan $u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{1}{3}$
$l_{21} = a_{21} = 6$, dan $l_{31} = a_{31} = 3$

Langkah-3 untuk $i = 2, 3$

Langkah-4 $l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = -6 - (6)(-\frac{2}{3}) = -2$

Langkah-5 $u_{23} = \frac{1}{l_{22}}\left(a_{23} - l_{21}u_{13}\right) = \frac{1}{-2}\left(7 - (-2)(\frac{1}{3})\right) = -\frac{5}{2}$
$l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} = -4 - (-1)(2) = -2$

sehingga

$$L = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks L dan U yang didapat sesuai dengan Contoh 3.3.4 ◄

SOAL-SOAL LATIHAN 3.3

Untuk lebih memahami materi yang telah diuraikan di atas, kerjakanlah soal-soal latihan berikut ini!

1. Dengan menggunakan metode Dekomposisi LU Crout, tentukan nilai x_1, x_2 dan x_3 dari sistem persamaan linier berikut.

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 21 \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 30 \end{aligned}$$

2. Dengan menggunakan metode Dekomposisi LU Crout, tentukan nilai x_1, x_2, x_3 dan x_4 dari sistem persamaan linier berikut.

$$\begin{aligned} 10x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 3 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4 &= 15 \\ -x_1 - x_2 + 10x_3 - 2x_4 &= 27 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 10x_4 &= -9 \end{aligned}$$

3. Dengan menggunakan metode Dekomposisi LU Crout, tentukan nilai x_1, x_2, dan x_3 dari sistem persamaan linier berikut.

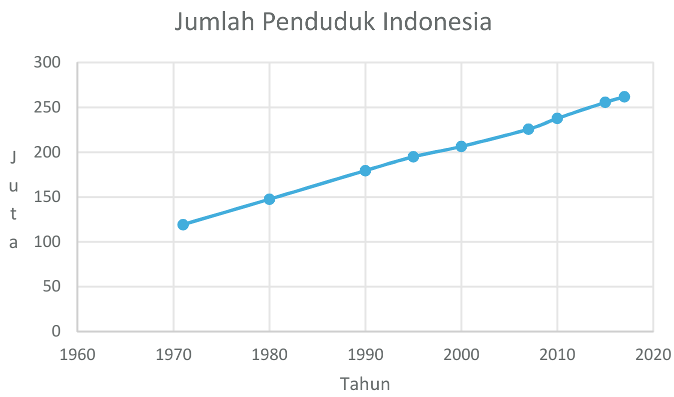
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 17 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 22 \end{aligned}$$

4. Dengan menggunakan metode Dekomposisi LU Crout, tentukan nilai x_1, x_2, dan x_3 dari sistem persamaan linier berikut.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1 \\ -1x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Bab 4

Interpolasi



Gambar 4.1: Grafik Penduduk Indonesia

Jumlah penduduk dari suatu negara akan berkembang sesuai dengan tingkat pertumbuhan penduduk. Jika tingkat pertumbuhan jumlah penduduk positif, maka jumlah penduduknya akan bertambah dan sebaliknya jika pertumbuhan penduduknya negatif, maka jumlah penduduknya akan tetap atau berkurang. Diberikan populasi penduduk negara Indonesia yang diambil dari BPS dari tahun 1971 hingga 2017 dan ditunjukan dalam Tabel 4.1 dan Gambar 4.1

Tabel 4.1: Jumlah Penduduk Indonesia

Tahun	1971	1980	1990	1995	2000	2007	2010	2015	2017
Populasi	119.2	147.5	179.4	194.8	206.3	225.6	237.6	255.5	261.7

Untuk mengestimasi jumlah penduduk yang berada di tahun 1971 sampai dengan tahun 2017, atau bahkan di tahun 2020, dapat diperoleh dengan menggunakan metode interpolasi. Pada Bab ini akan dibahas masalah interpolasi polinomial, beberapa metode akan dibahas pada Bab ini, antara metode Lagrange, metode Beda Terbagi, metode Newton, interpolasi linier bagian demi bagian, interpolasi kuadratik bagian demi bagian, dan interpolasi kubik bagian demi bagian.

4.1 Metode Lagrange

Metode Lagrange adalah suatu metode yang digunakan untuk mendapatkan rumus atau formula yang berbentuk polinomial, karena formulasi tersebut tergantung banyaknya data yang digunakan. Jika diberikan dua pasang titik $(x_0, f(x_0))$ dan $(x_1, f(x_1))$, maka formulasi dari dua pasang titik tersebuat akan diformulasikan dalam interpolasi linier dari polinomial yang menghubungkan dua pasang titik tersebut, yaitu:

$$P_1(x) = L_0 f(x_0) + L_1 f(x_1) \tag{4.1}$$

dengan

$$L_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{dan} \quad L_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

sehingga Persamaan 4.1 menjadi

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \tag{4.2}$$

Jika diketahui tiga pasang titik, yaitu $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, dan $(x_2, f(x_2))$, maka dari tiga pasang titik tersebut merupakan pendekatan parabola yang melewati tiga pasang titik tersebut, biasanya dinamakan dengan interpolasi kuadratik, persamaan tersebut adalah

$$P_2(x) = L_0 f(x_0) + L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2) \tag{4.3}$$

dengan

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\
L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\
L_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}
\end{aligned}$$

Sehingga dapat diperoleh persamaan interpolasi polinomial Lagrange order kedua merupakan penjabaran Persamaan 4.3 sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
P_2(x) = {} & \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \\
& \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)
\end{aligned}$$

Jika diketahui empat pasang titik, yaitu $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, dan $(x_2, f(x_2))$, serta $(x_3, f(x_3))$, maka dari empat pasang titik tersebut merupakan pendekatan kubik yang melewati empat pasang titik tersebut, biasanya dinamakan dengan interpolasi polinomial Lagrange order tiga, persamaan tersebut adalah

$$P_3(x) = L_0 f(x_0) + L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2) + L_3 f(x_3) \tag{4.4}$$

dengan

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \\
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\
L_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}
\end{aligned}
$$

Secara umum, bentuk interpolasi polinomial Lagrange untuk order yang lebih tinggi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \tag{4.5}$$

dengan L_i adalah koefisien bobot yang didefinisikan sebagai berikut

$$L_i = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \tag{4.6}$$

Banyak pasangan titik yang diketahui akan menentukan order dari polinomial Lagrange. Jika diketahui $n+1$ pasang titik yang berbeda, maka order polinomial Lagrange adalah order n.

CONTOH 4.1.1 Diberikan tiga data suhu, yaitu $(0, 3.85)$, $(20, 0.8)$, dan $(40, 0.212)$. Gunakan interpolasi polinomial Lagrange order pertama dan order kedua untuk menentukan nilai pada saat suhu 15^oC.

Penyelesaian

Dengan menggunakan interpolasi polinomial Lagrange order pertama, maka dua pasang titik yang digunakan pasangan titik pertama dan pasangan titik kedua, hal ini dikarenakan titik yang dicari berada diantara dua titik tersebut. Pasangan titik itu adalah $(0, 3.85)$, dan $(20, 0.5)$, oleh karena itu

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{x-20}{0-20} = -\frac{1}{20}(x-20) \\
L_0(15) &= -\frac{1}{20}(15-20) = \frac{1}{4}, \qquad \text{dan} \\
L_1(x) &= \frac{x-0}{20-0} = \frac{x}{20} \\
L_1(15) &= \frac{15}{20} = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

sehingga

$$P_1(15) = \frac{1}{4}3.85 + \frac{3}{4}0.8 = 1.5625$$

atau dengan cara

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1) \\
&= \frac{x-20}{0-20}(3.85) + \frac{x-0}{20-0}(0,8)
\end{aligned}
$$

untuk $x = 15^oC$, maka

$$P_1(15) = \frac{15-20}{0-20}(3.85) + \frac{15-0}{20-0}f(0,8) = 1.5625$$

Sedangkan, jika menggunakan tiga pasang titik, yaitu $(0, 3.85)$, $(20, 0.8)$, dan $(40, 0.212)$, maka gunakan interpolasi polinomial Lagrange order kedua, hitung

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-20)(x-40)}{(0-20)(0-40)} \\
&= \frac{1}{800}(x-20)(x-40) \\
L_0(15) &= \frac{1}{800}(15-20)(15-40) = -\frac{5}{32},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-40)}{(10-20)(10-40)} \\
&= \frac{1}{300}x(x-40) \\
L_1(15) &= \frac{1}{300}15(15-40) = -\frac{5}{4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-20)}{(40-0)(40-20)} \\
&= \frac{1}{800}x(x-20) \\
L_2(15) &= \frac{1}{800}15(15-20) = -\frac{3}{32},
\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \\
P_2(15) &= L_0(15)f(0) + L_1(15)f(20) + L_2(15)f(40) \\
&= -\frac{5}{32}(3.85) - \frac{5}{4}(0.8) - \frac{3}{32}(0.212) \\
&= 1.331688
\end{aligned}$$

atau dengan cara

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \\
&\quad \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2) \\
&= \frac{(x-20)(x-40)}{(0-20)(0-40)}(3.85) + \frac{(x-0)(x-40)}{(10-0)(10-40)}(0.8) + \\
&\quad \frac{(x-0)(x-20)}{(40-0)(40-20)}(0.212)
\end{aligned}$$

untuk $x = 15^oC$, maka

$$\begin{aligned} P_2(15) &= \frac{(15-20)(15-40)}{(0-20)(0-40)}(3.85) + \frac{(15-0)(15-40)}{(10-0)(10-40)}(0.8) + \\ &\quad \frac{(15-0)(15-20)}{(40-0)(40-20)}(0.212) \\ &= 1.331688 \end{aligned}$$

◀

Nilai error untuk polinomial Lagrange order n jika diberikan $n+1$ titik yang berbeda, yaitu $x_0, x_1, \cdots, x_n$ dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$R(x_{n+1}) = \frac{f^{(n+1)}(\epsilon(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \tag{4.7}$$

Untuk lebih memahami materi yang telah diuraikan dan sebuah contoh di atas, perhatikan contoh

Contoh 4.1.2 Diketahui $x_0 = 2, x_1 = 2.75$, dan $x_2 = 4$.

1. Tentukan interpolasi polinomial Lagrange order kedua untuk $f(x) = 1/x$.

2. Gunakan polinomial tersebut untuk mengaproksimasi nilai $f(3) = 1/3$.

Penyelesaian

Pada soal, diminta untuk menentukan interpolasi polinomial Lagrange order kedua. Sehingga dibutuhkan tiga titik, yaitu x_0, x_1 dan x_2. Pertama, tentukan nilai dari $f(x_0)$, $f(x_1)$, dan $f(x_2)$, yaitu

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(2) = \frac{1}{2} \\ f(x_1) &= f(2.75) = \frac{4}{11} \\ f(x_2) &= f(4) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

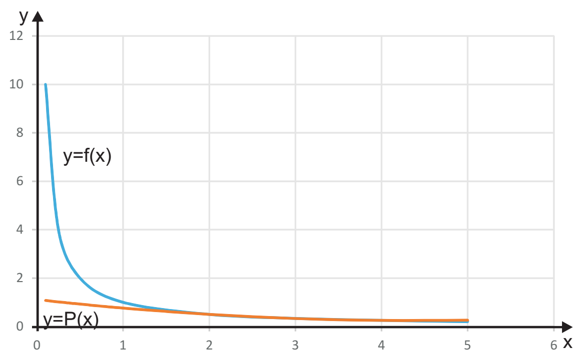
kemudian tentukan terlebih dahulu koefisien polinomial $L_0(x), L_1(x)$, dan $L_2(x)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-2.75)(x-4)}{(2-2.75)(2-4)} = \frac{2}{3}(x-2.75)(x-4) \\ L_1(x) &= \frac{(x-2)(x-4)}{(2.75-2)(2.75-4)} = -\frac{16}{15}(x-2)(x-4) \\ L_2(x) &= \frac{(x-2)(x-2.75)}{(4-2)(4-2.75)} = \frac{2}{5}(x-2)(x-2.75) \end{aligned}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{k=0}^{2} f(x_k)L_k(x) \\
&= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \\
&= \frac{1}{2}\frac{2}{3}(x-2.75)(x-4) - \frac{4}{11}\frac{16}{15}(x-2)(x-4) \\
&\quad + \frac{1}{4}\frac{2}{5}(x-2)(x-2.75)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(x) &= \frac{1}{3}(x-2.75)(x-4) - \frac{64}{165}(x-2)(x-4) \\
&\quad + \frac{1}{10}(x-2)(x-2.75) \\
&= \frac{1}{3}(x^2-6.75x+11) - \frac{64}{165}(x^2-6x+8) \\
&\quad + \frac{1}{10}(x^2-4.75x+5.5) \\
&= \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44}
\end{aligned}$$



Gambar 4.2: Sketsa grafik $f(x)$ dan $P(x)$

Dengan menggunakan polinomial yang terakhir, diperoleh bahwa $f(1/3) \approx P(1/3)$. Sehingga:

$$f(1/3) \approx P(1/3) = \frac{9}{22} - \frac{105}{88} + \frac{49}{44} = \frac{29}{88} \approx 0.32955$$

◀

Contoh berikut, polinomial dengan empat data yang diketahui akan menghasilkan polinomial derajat 3.

Contoh 4.1.3 Diketahui empat pasangan titik, yaitu $(1,3)$, $(2,6)$, $(3,19)$, dan $(5,99)$, tentukan interpolasi Lagrange order 3?

Penyelesaian
Tentukan terlebih dahulu koefisien polinomial $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ dan $L_3(x)$ sebagai

berikut.

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-5)} = \frac{1}{8}(x-2)(x-3)(x-5) \\
L_1(x) &= \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-5)} = \frac{1}{3}(x-1)(x-3)(x-5) \\
L_2(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-5)} = -\frac{1}{4}(x-1)(x-2)(x-5) \\
L_3(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(5-1)(5-2)(5-3)} = \frac{1}{16}(x-1)(x-2)(x-3)
\end{aligned}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{k=0}^{3} f(x_k)L_k(x) \\
&= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) \\
&= 3\frac{1}{8}(x-2)(x-3)(x-5) + 6\frac{1}{3}(x-1)(x-3)(x-5) \\
&\quad - 19\frac{1}{4}(x-1)(x-2)(x-5) + 99\frac{1}{16}(x-1)(x-2)(x-3) \\
&= \frac{3}{8}(x^3 - 10x^2 + 31x - 30) - 2(x^3 - 9x^2 + 23x - 15) \\
&\quad + \frac{19}{4}(x^3 - 8x^2 + 17x - 10) + \frac{33}{2}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \\
&= \frac{157}{8}x^3 - \frac{415}{8}x^2 + \frac{461}{8}x + \frac{238}{8}
\end{aligned}$$

Secara umum, Metode Lagrange merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk menginterpolasi polinomial. Secara umum, bentuk interpolasi polinomial Lagrange untuk order yang lebih tinggi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f_{n-1}(x) = \sum_{i=1} nL_i(x)f(x_i)$$

dimana :

$$L_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

dimana n adalah order yang diinginkan. Nilai order bergantung pada banyak titik yang digunakan. Dimana jika digunakan $n + 1$ titik yang berbeda, maka dilakukan interpolasi polinomial order ke-n. ◄

SOAL-SOAL LATIHAN 4.1

Kerjakan soal-soal berikut ini untuk mengukur tingkat penguasaan Anda atas bahasan yang telah Anda pelajari.

1. Tentukan nilai dari $f(8.4)$, jika diketahui

(a) $f(8.1) = 16.94410$, $f(8.3) = 17.56492$, $f(8.6) = 18.50515$, dan $f(8.7) = 18.82091$.

(b) $f(8.3) = 17.56492$, $f(8.6) = 18.50515$, dan $f(8.7) = 18.82091$.

(c) $f(8.3) = 17.56492$, dan $f(8.6) = 18.50515$,

(d) $f(8.1) = 16.94410$, dan $f(8.7) = 18.82091$.

dengan menggunakan interpolasi polinomial Lagrange

2. Ditentukan $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1$, tentukan nilai $f(-\frac{1}{3})$, jika diketahui

(a) $x_1 = -0.75, x_2 = -0.5, x_3 = -0.25$, dan $x_4 = 0$,

(b) $x = 0, -0.25$, dan $x = -0.5$,

(c) $x = -0.25$, dan $x = -0.5$

dengan interpolasi Lagrange order ketiga dan tentukan galatnya.

4.2 Metode Beda Terbagi

Jika diketahui dua pasang titik pada suatu kurva, yaitu $(x_0, f(x_0))$ dan $(x_1, f(x_1))$, maka interpolasi linear akan didapatkan, yaitu persamaan garis yang melalui dua titik, adalah

$$\frac{f_1(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

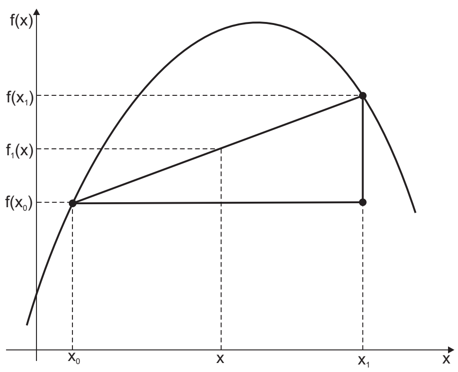
atau

$$P_1(x) = f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \tag{4.8}$$

persamaan ini dinamakan interpolasi linier. $f_1(x)$ menyatakan interpolasi polinomial order pertama atau interpolasi linier, sedangkan

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

dinamakan beda terbagi.



Gambar 4.3: Metode Interpolasi Beda Terbagi

Perhatikan Gambar 4.3, sebuah kurva, jika diambil dua titik pada kurva yaitu $(x_0, f(x_0))$ dan $(x_1, f(x_1))$ dan ditarik sebuah garis, maka garis tersebut adalah interpolasi linier. Dengan demikian untuk mendapatkan nilai pendekatan pada x diantara

x_0 dan x_1, yaitu $f_1(x)$. Untuk memudahkan pengertian metode interpolasi beda terbagi, perhatikan contoh di bawah ini.

Contoh 4.2.1 Diketahui kurva $y = \ln(x)$ dengan dua titik yaitu titik $x = 1$ dan $x = 6$, temukan nilai pendekatan untuk $x = 2$ dengan menggunakan interpolasi beda terbagi linear.

Penyelesaian
Hitung terlebih dahulu nilai fungsi untuk $x_0 = 1$, yaitu $\ln(x_0) = 0$ dan $x_1 = 6$ yaitu $\ln(x_1) = 1.791759$. Dengan menggunakan Persamaan 4.8, diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\ &= \ln(x_0) + \frac{\ln(x_1) - \ln(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\ &= 0 + \frac{1.791759 - 0}{6 - 1}(x - 1) \end{aligned}$$

untuk $x = 2$, maka

$$f_1(2) = 0 + \frac{1.791759 - 0}{6 - 1}(2 - 1) = 0.3583519$$

sedangkan nilai benar untuk $x = 2$ adalah $\ln(2) = 0.6931472$, dan kesalahan yang terjadi adalah 0.334795, atau 48.3%. ◀

Perhatikan contoh berikut ini, contoh yang sama tetapi untuk nilai x yang lebih dekat.

Contoh 4.2.2 Diketahui kurva $y = \ln(x)$ dengan dua titik yaitu titik $x = 1$ dan $x = 4$, temukan nilai pendekatan untuk $x = 2$ dengan menggunakan interpolasi beda terbagi linear.

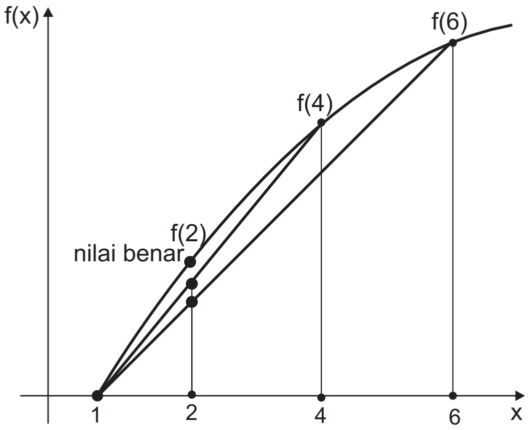
Penyelesaian
Hitung terlebih dahulu nilai fungsi untuk $x_0 = 1$, yaitu $\ln(x_0) = 0$ dan $x_1 = 4$ yaitu $\ln(x_1) = 1.386294$. Dengan menggunakan Persamaan 4.8, diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\ &= \ln(x_0) + \frac{\ln(x_1) - \ln(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\ &= 0 + \frac{1.386294 - 0}{4 - 1}(x - 1) \end{aligned}$$

untuk $x = 2$, maka

$$f_1(2) = 0 + \frac{1.386294 - 0}{4 - 1}(2 - 1) = 0.4620981$$

sedangkan nilai benar untuk $x = 2$ adalah $\ln(2) = 0.6931472$, dan kesalahan yang terjadi adalah 0.231049, atau 33.33%. ◀



Gambar 4.4: Interpolasi Linear

Dari dua contoh yang sama, tetapi jarak antara titik yang satu dengan titik yang berbeda, nilai yang didapat berbeda. Dari Contoh 4.2.1 dan 4.2.2 dapat ditarik kesimpulan bahwa makin pendek interval atau makin dekat jarak antara satu titik dengan titik yang lain, maka nilai yang didapat semakin mendekati nilai analitiknya, seperti pada Gambar 4.4.

Metode beda terbagi kedua diterapkan jika diketahui tiga titik yang berbeda. Sehingga pendekatannya berupa polinomial order kedua atau dinamakan interpolasi kuadratik. Bentuk umum persamaan pendekatan polinomial order kedua sebagai berikut.

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) \tag{4.9}$$

atau

$$f_2(x) = b_0 + b_1x - b_1x_0 + b_2x^2 + b_2x_0x_1 - b_2xx_0 - b_2xx_1$$

persamaan tersebut identik dengan persamaan berikut

$$f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

sehingga

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 - b_1x_0 + b_2x_0x_1 \\ a_1 &= b_1 - b_2x_0 - b_2x_1 \\ a_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Untuk menghitung nilai b_0 pada Persamaan 4.9, dengan memisalkan $x = x_0$, diperoleh:

$$b_0 = f(x_0) \tag{4.10}$$

dengan memisalkan $x = x_1$ pada Persamaan 4.9 dan mensubstitusikan Persamaan 4.10 kedalam persamaan yang sama, maka

$$f(x_1) = f(x_0) + b_1(x_1 - x_0) + b_2(x_1 - x_0)(x_1 - x_1)$$

sehingga

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{4.11}$$

Tabel 4.2: Tabel Beda Terbagi

x	$f(x)$	Beda Terbagi Pertama	Beda Terbagi Kedua	Beda Terbagi Ketiga
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3, x_4, x_5]$
x_3	$f[x_3]$	$f[x_3, x_4]$	$f[x_3, x_4, x_5]$	
x_4	$f[x_4]$	$f[x_4, x_5]$		
x_5	$f[x_5]$			

Persamaan 4.10 dan 4.11 dapat disubstitusi kedalam Persamaan 4.9, sehingga untuk $x = x_2$ dapat diperoleh:

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2 - x_0} \tag{4.12}$$

Secara umum, polinomial order ke-n memerlukan data sebanyak $(n + 1)$ data, yaitu $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ atau pasangan titik-titik dari $[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)], \cdots, [x_n, f(x_n)]$, sehingga polinomial order ke-n didefinisikan sebagai berikut

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \tag{4.13}$$

dengan cara yang sama seperti sebelumnya, maka nilai koefisiennya adalah

$$b_0 = f(x_0) \tag{4.14}$$
$$b_1 = f[x_1, x_0] \tag{4.15}$$
$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0] \tag{4.16}$$
$$\cdots \tag{4.17}$$
$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0] \tag{4.18}$$

Untuk beda terbagi pertama secara umum dapat dituliskan sebagai berikut.

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \tag{4.19}$$

Untuk beda terbagi kedua, secara umum dapat dituliskan sebagai berikut.

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k} \tag{4.20}$$

Sehingga, untuk beda terbagi ke-n, secara umum dapat dituliskan sebagai berikut.

$$f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_0]}{x_n - x_0} \tag{4.21}$$

Secara umum, dapat dibuat tabel beda terbagi sebagaimana pada Tabel 4.2. Untuk lebih jelasnya, perhatikan Algoritma Newton Beda Terbagi sebagai berikut,

Algoritma Newton Beda Terbagi
Untuk menentukan koefisien beda terbagi dari polinomial P pada $(n+1)$ titik yang berbeda, yaitu $x_0, x_1, \cdots, x_n$ untuk membentuk fungsi f.
INPUT: $x_0, x_1, \cdots, x_n$, nilai $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$ dinyatakan sebagai $F_{0,0}, F_{1,0}, \cdots, F_{n,0}$.
OUTPUT: nilai $F_{0,0}, F_{1,1}, \cdots, F_{n,n}$ dimana

$$P_n(x) = F_{0,0} + \sum_{i=1}^{n} F_{i,j} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

dimana $F_{i,j} = f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$.

Langkah-1 For $i = 1, 2, \cdots, n$
For $j = 1, 2, \cdots, i$
set $F_{i,j} = \frac{F_{i,j-1} - F_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$
$(F_{i,j} = f[x_{i-j}, \cdots, x_i])$

Langkah-2 OUTPUT $(F_{0,0}, F_{1,1}, \cdots, F_{n,n})$;
STOP.

Contoh 4.2.3 Jika diketahui tiga pasang titik, yaitu

$$(1, \ln(1)), (4, \ln(4)), \quad \text{dan} \quad (6, \ln(6))$$

Hitunglah nilai pendekatan untuk $ln(2)$ dengan menggunakan interpolasi beda terbagi?

Penyelesaian
Diketahui $x_0 = 1$, $x_1 = 4$ dan $x_2 = 6$, maka $\ln(x_0) = 0$, $\ln(x_1) = 1.386294$ dan $\ln(x_2) = 1.791759$, akan dicari $\ln(2)$ dengan menggunakan interpolasi beda terbagi. Dengan menggunakan Persamaan 4.10, didapat

$$b_0 = f(x_0) = 0$$

dengan Persamaan 4.11

$$b_1 = \frac{1.386294 - 0}{4 - 1} = 0.4620981$$

dan dengan Persamaan 4.12

Tabel 4.3: Tabel Beda Terbagi

x	$f(x)$	Beda Pertama	Beda Kedua
$x_0 = 1$	0	0.4620981	-0.05187311
$x_1 = 4$	1.386294	0.2027326	
$x_2 = 6$	1.791759		

$$b_2 = \frac{\frac{1.791759 - 1.386294}{6-4} - 0.4620981}{6 - 1} = -0.0518731$$

jika dituliskan dalam tabel, seperti Tabel 4.3
dan untuk mendapatkan nilai dari $x = 2$, adalah

$$\begin{aligned} f_2(x) &= b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) \\ f_2(2) &= b_0 + b_1(2 - 1) + b_2(2 - 1)(2 - 4) \\ &= 0 + 0.4620981(1) - 0.0518731(1)(2) \\ &= 0.5658444 \end{aligned}$$

sedangkan nilai benar untuk $x = 2$ adalah $\ln(2) = 0.6931472$, dan kesalahan yang terjadi adalah 0.127303, atau 18.37%, lebih baik dari dua contoh di atas. ◀

SOAL-SOAL LATIHAN 4.2

Untuk lebih memahami materi yang telah diuraikan di atas, kerjakanlah soal-soal latihan berikut ini!

1. Diketahui $y = f(x) = \frac{1}{x}$ dan tiga titik yaitu $x_0 = 2, x_1 = 2.75$, dan $x_2 = 4$.Tentukan interpolasi beda terbagi untuk tiga titik tersebut.

2. Diberikan data sebagai berikut.

x	0	1.8	5	6
y	26	16.415	5.375	3.5

Dengan metode beda terbagi derajat ketiga, tentukan nilai dari y pada saat $x = 3.5$.

3. Diketahui $x_1 = -0.75, x_2 = -0.5, x_3 = -0.25$, dan $x_4 = 0$. Jika diberikan $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1$, maka tentukan nilai pendekatan dari $f(-\frac{1}{3})$ dengan interpolasi Newton beda terbagi order ketiga.

4.3 Metode Beda

Telah dipelajari pada modul sebelumnya, bahwa interpolasi polinomial dapat ditulis

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f[x_o] + f[x_0, x_1](x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{4.22}$$

dengan

$$a_k = f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k]$$

atau lebih ringkasnya dapat ditulis

$$P_n(x) = f[x_o] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k](x - x_0)\cdots(x - x_{k-1}) \tag{4.23}$$

Metode beda atau lebih lengkapnya dinamakan metode beda Newton. Ada tiga macam metode beda Newton, yaitu Metode Beda Newton Depan, Metode Beda Newton Belakang, dan Metode Beda Newton Pusat. Metode Newton Beda dapat diekspresikan secara sederhana beda antara satu titik dengan titik yang lain mempunyai jarak yang sama, yaitu

$$h = x_{i+1} - x_i, \qquad \text{dengan } i = 0, 1, 2, \cdots n - 1$$

Misal $x = x_0 + sh$, maka beda $x - x_i$ adalah

$$x - x_i = (s - i)h$$

Maka Persamaan 4.22 dapat ditulis seperti

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_o + sh) \\ &= f[x_o] + shf[x_0, x_1] + s(s-1)h^2 f[x_0, x_1, x_2] + \\ &\quad \cdots + s(s-1)\cdots(s-k+1)h^n f[x_0, x_1, \cdots, x_n] \end{aligned} \tag{4.24}$$

atau

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} s(s-1)\cdots(s-k+1)h^k f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$$

jika

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}$$

maka

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_0 + sh) \\ &= f[x_o] + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} k! h^k f[x_0, x_1, \cdots, x_n] \end{aligned} \tag{4.25}$$

4.3.1 Metode Newton Beda Maju

Metode Newton beda maju dapat diaplikasikan untuk mendekati titik yang nilainya berada di sekitar titik awal data. Pada metode ini, diperkenalkan notasi beda maju adalah Δ. Dari metode Newton beda terbagi seperti dijabarkan pada modul sebelumnya, dapat diperoleh rumusan untuk metode Newton beda maju sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{1}{h}(f(x_1) - f(x_0)) \\ &= \frac{1}{h}\Delta f(x_0) \\ f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\ &= \frac{1}{2h}\left(\frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{h}\right) \\ &= \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f(x_0) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \\
&= \frac{1}{3h}\frac{1}{2h}\left(\left(\frac{\Delta f(x_2) - \Delta f(x_1)}{h}\right) - \left(\frac{\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)}{h}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3h}\frac{1}{2h}\left(\frac{\Delta f(x_2) - 2\Delta f(x_1) + \Delta f(x_0)}{h}\right) \\
&= \frac{1}{3!h^3}\Delta^3 f(x_0)
\end{aligned}
$$

Secara umum,

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{1}{k!h^k}\Delta^k f(x_0)$$

Dari rumus polinomial pada metode Newton beda terbagi, lihat Persamaan 4.25, dapat diperoleh rumus polinomial untuk metode Newton beda maju sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= f[x_o] + \sum_{k=1}^{n} \left(\begin{array}{c} s \\ k \end{array} \right) k!\ h^k f[x_0, x_1, \cdots, x_n] \\
&= f[x_o] + \sum_{k=1}^{n} \left(\begin{array}{c} s \\ k \end{array} \right) k!\ h^k \frac{1}{k!\ h^k}\Delta^k f(x_0)
\end{aligned}
$$

maka

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0) \tag{4.26}$$

Contoh 4.3.1 Diberikan lima data, yaitu $(1.0, 0.7652)$, $(1.3, 0.6201)$, $(1.6, 0.4554)$, $(1.9, 0.2818)$ dan $(2.2, 0.1104)$. Hitunglah nilai pendekatan dari $f(1.1)$?

Penyelesaian

Buatlah tabel beda terlebih dahulu, yaitu

	$f[x_i]$	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
1.0	<u>0.7652</u>				
		<u>-0.4837</u>			
1.3	0.6201		<u>-0.1088</u>		
		-0.5490		<u>0.0659</u>	
1.6	0.4554		-0.0495		<u>0.0023</u>
		-0.5787		0.0687	
1.9	0.2818		0.0123		
		-0.5713			
2.2	0.1104				

karena yang akan dicari adalah $f(1.1)$, maka digunakan beda maju, yaitu hasil perhitungan di bagian atas (bilangan yang bergaris bawah). Sekarang menentukan bilangan

s, karena $x = 1.1$ dan $h = 0.3$ maka $x = x_0 + sh$, dan $s = \frac{x-x_0}{h} = \frac{1.1-1.0}{0.3} = \frac{1}{3}$, sehingga

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= P_4(x_0 + sh) \\
&= P_4(1.0 + \frac{1}{3}(0.3)) \\
&= f[x_0] + \left(\begin{array}{c} s \\ 1 \end{array}\right) \Delta^1 f(x_0) + \left(\begin{array}{c} s \\ 2 \end{array}\right) \Delta^2 f(x_0) \\
&\quad + \left(\begin{array}{c} s \\ 3 \end{array}\right) \Delta^3 f(x_0) + \left(\begin{array}{c} s \\ 4 \end{array}\right) \Delta^4 f(x_0) \\
&= f[x_0] + \left(\begin{array}{c} \frac{1}{3} \\ 1 \end{array}\right) \Delta^1 f(x_0) + \left(\begin{array}{c} \frac{1}{3} \\ 2 \end{array}\right) \Delta^2 f(x_0) \\
&\quad + \left(\begin{array}{c} \frac{1}{3} \\ 3 \end{array}\right) \Delta^3 f(x_0) + \left(\begin{array}{c} \frac{1}{3} \\ 4 \end{array}\right) \Delta^4 f(x_0) \\
&= f[x_0] + sh\Delta^1 f(x_0) + s(s-1)h^2\Delta^2 f(x_0) \\
&\quad + s(s-1)(s-2)h^3\Delta^3 f(x_0) \\
&\quad + s(s-1)(s-2)(s-3)h^4\Delta^4 f(x_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= 0.7652 + \frac{1}{3}(0.3)(-0.4837) + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)(0.3)^2(-0.1088) \\
&\quad + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)(0.3)^3(0.0659) \\
&\quad + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)(0.3)^4(0.0023) \\
&= 0.7197
\end{aligned}$$

◀

4.3.2 Metode Newton Beda Mundur

Metode Newton beda mundur dapat diaplikasikan untuk mendekati titik yang nilainya berada di sekitar titik akhir data. Pada metode ini, diperkenalkan notasi beda mundur sebagai berikut : ∇. Interpolasi dilakukan dari data akhir ke data awal sebagai berikut $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0$, sehingga dapat diperoleh rumus interpolasinya adalah

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= f[x_n] + f[x_n, x_{n-1}](x - x_n) \\
&\quad + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x - x_n)(x - x_n)(x - x_{n-1}) \\
&\quad + \cdots + f[x_n, \cdots, x_0](x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_0)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Jika $x = x_n + sh$ dan $x = x_i + (s + n - i)h$, maka

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= P_n(x_n + sh) \qquad (4.28) \\
&= f[x_n] + shf[x_n, x_{n-1}] + s(s+1)h^2 f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] \\
&\quad + \cdots + s(s+1)\cdots(s+n-1)h^n f[x_n, \cdots, x_0]
\end{aligned}$$

Selanjutnya, didefinisikan notasi untuk beda ke belakang sebagai berikut:

$$\nabla p_n = p_n - p_{n-1},\ untuk\, n \geq 1$$

Untuk pangkat yang lebih tinggi didefinisikan secara rekursif sebagai berikut.

$$\nabla^k p_n = \nabla(\nabla^{k-1} p_n),\ untuk\, k \geq 2$$

Sehingga :

$$f[x_n, x_{n-1}] = \frac{1}{h}\nabla f(x_n)$$

$$f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] = \frac{1}{2h^2}\nabla^2 f(x_n)$$

Secara umum:

$$f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-k}] = \frac{1}{k!h^k}\nabla^k f(x_n)$$

Sehingga rumusan polinomial untuk metode Newton beda mundur sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P_n(x) =& f[x_n] + s\nabla f(x_n) + \frac{s(s+1)}{2}\nabla^2 f(x_n) + \cdots + \\ & \frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{n!}\nabla^n f(x_n) \end{aligned}$$

Selanjutnya diperkenalkan notasi koefisien binomial untuk nilai real s sebagai berikut.

$$P_n(x) = f[x_n] + (-1)^1 \binom{-s}{1} \nabla f(x_n) + \binom{-s}{2} \nabla^2 f(x_n) + \cdots + (-1)^n \nabla^n f(x_n)$$

Sehingga dapat diperoleh persamaan untuk metode Newton beda mundur sebagai berikut.

$$P_n(x) = f[x_n] + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n) \tag{4.29}$$

Contoh 4.3.2 Dengan contoh yang sama, yaitu diberikan lima data, yaitu $(1.0, 0.7652)$, $(1.3, 0.6201)$, $(1.6, 0.4554)$, $(1.9, 0.2818)$ dan $(2.2, 0.1104)$. Hitunglah nilai pendekatan dari $f(2.0)$?

Penyelesaian

Buatlah tabel beda terlebih dahulu, yaitu

	$f[x_i]$	∇^1	∇^2	∇^3	∇^4
1.0	0.7652				
		-0.4837			
1.3	0.6201		-0.1088		
		-0.5490		0.0659	
1.6	0.4554		-0.0495		$\underline{0.0023}$
		-0.5787		$\underline{0.0687}$	
1.9	0.2818		$\underline{0.0123}$		
		$\underline{-0.5713}$			
2.2	$\underline{0.1104}$				

karena yang akan dicari adalah $f(2.0)$, maka digunakan beda mundur, yaitu hasil perhitungan di bagian bawah (bilangan yang bergaris bawah). Sekarang menentukan bilangan s, karena $x = 2.0$ dan $h = 0.3$ maka $x = x_n + sh$, dan $s = \frac{x-x_n}{h} = \frac{2.0-2.2}{0.3} = -\frac{2}{3}$, sehingga

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= P_4(x_n + sh) = P_4(2.2 - \frac{2}{3}(0.3)) \\
&= f[x_n] + \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} \nabla^1 f(x_n) + \begin{pmatrix} s \\ 2 \end{pmatrix} \nabla^2 f(x_n) \\
&\quad + \begin{pmatrix} s \\ 3 \end{pmatrix} \nabla^3 f(x_n) + \begin{pmatrix} s \\ 4 \end{pmatrix} \nabla^4 f(x_n) \\
&= f[x_4] + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \nabla^1 f(x_4) + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix} \nabla^2 f(x_4) \\
&\quad + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 3 \end{pmatrix} \nabla^3 f(x_4) + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 4 \end{pmatrix} \nabla^4 f(x_4) \\
&= f[x_4] + sh\nabla^1 f(x_4) + s(s+1)h^2\nabla^2 f(x_4) \\
&\quad +s(s+1)(s+2)h^3\nabla^3 f(x_4) \\
&\quad +s(s+1)(s+2)(s+3)h^4\nabla^4 f(x_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= 0.1104 - \frac{2}{3}(0.3)(-0.5713) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)(0.3)^2(0.0123) \\
&\quad -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)(0.3)^3(0.0687) \\
&\quad -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{3}\right)(0.3)^4(0.0023) \\
&= 0.2239
\end{aligned}$$

◀

4.3.3 Metode Newton Beda Pusat

Metode Newton beda pusat dapat diaplikasikan untuk mendekati titik yang nilainya berada di sekitar titik tengah data. Pada metode ini, dipilih x_0 yang berada di bawah $x_1, x_2, \cdots$ dan berada di atas $x_{-1}, x_{-2}, \cdots$. Sehingga dapat diperoleh **Rumus Stirling** sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
P_n(x) = P_{2m+1}(x) &= f[x_0] + \frac{sh}{2}(f[x_{-1}, x_0] + f[x_0, x_1] + s^2h^2 f[x_{-1}, x_0, x_1] \\
&+ \frac{s(s^2-1)h^3}{2} f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1] + f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2]) \\
&+ \cdots + s^2(s^2-1)(s^2-4)\cdots(s^2-(m-1)^2)h^{2m} f[x_{-m}, \cdots, x_m] \\
&+ \frac{s(s^2-1)\cdots(s^2-m^2)h^{2m+1}}{2}(f[x_{-m-1}, \cdots, x_m] + f[x_{-m}, \cdots, x_{m+1}])
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Tabel 4.4: Newton Beda Pusat

x	$f(x)$	Beda pertama	Beda kedua	Beda ketiga	Beda keempat
x_{-2}	$f[x_{-2}]$				
		$f[x_{-2}, x_{-1}]$			
x_{-1}	$f[x_{-1}]$		$f[x_{-2}, x_{-1}, x_0]$		
		$\underline{f[x_{-1}, x_0]}$		$\underline{f[x_{-2}, \cdots, x_1]}$	
x_0	$\underline{f[x_0]}$		$\underline{f[x_{-1}, x_0, x_1]}$		$\underline{f[x_{-2}, \cdots, x_2]}$
		$\underline{f[x_0, x_1]}$		$\underline{f[x_{-1}, \cdots, x_2]}$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$			
x_2	$f[x_2]$				

Rumus 4.30 tersebut digunakan jika $n = 2m + 1$ ganjil. Jika $n = 2m$ genap, maka rumus 4.30 digunakan dengan menghapus baris yang terakhir. Metode Newton beda pusat dapat diilustrasikan dalam Tabel 4.4. Supaya lebih paham tentang beda pusat, perhatikan contoh di bawah ini.

Contoh 4.3.3 Dengan contoh yang sama, yaitu diiberikan lima data, yaitu $(1.0, 0.7652)$, $(1.3, 0.6201)$, $(1.6, 0.4554)$, $(1.9, 0.2818)$ dan $(2.2, 0.1104)$. Hitunglah nilai pendekatan dari $f(1.6)$?

Penyelesaian

Sebelum membuat tabel beda, tentukan x_0 dari $f(x)$ yang dicari. Karena yang di cari adalah $x = 1.6$ maka x_0 yang paling dekat adalah $x = 1.6$, jadi $x = 1.6$ sebagai x_0, $x = 1.3$ sebagai x_{-1}, $x = 1.0$ sebagai x_{-2}, $x = 1.9$ sebagai x_1, dan $x = 2.2$ sebagai x_2, sehingga tabel beda pusat adalah

x	$f[x_i]$	beda 1	beda 2	beda 3	beda 4
x_{-2}=1.0	0.7652				
		−0.4837			
x_{-1}=1.3	0.6201		−0.1088		
		-0.5490		**0.0659**	
x_0=**1.6**	**0.4554**		**-0.0495**		**0.0023**
		-0.5787		**0.0687**	
x_1=1.9	0.2818		0.0123		
		−0.5713			
x_2=2.2	0.1104				

karena yang akan dicari adalah $f(1.5)$, maka digunakan beda pusat, yaitu hasil perhitungan di bagian bawah dan atas dari $x_0 = 1.6$ (bilangan yang bercetak tebal). Sekarang menentukan bilangan s, karena $x = 1.5$ dan $h = 0.3$ maka $x = x_0 + sh$, dan $s = \frac{x-x_0}{h} = \frac{1.5-1.6}{0.3} = -\frac{1}{3}$, sehingga

$$
\begin{aligned}
P_4(x) &= P_4(x_0+sh) = P_4\left(1.6 - \frac{1}{3}(0.3)\right) \\
&= f[x_0] + \frac{sh}{2}(f[x_{-1},x_0] + f[x_0,x_1]) + s^2h^2 f[x_{-1},x_0,x_1] \\
&\quad + \frac{s(s^2-1)h^3}{2}(f[x_{-2},x_{-1},x_0,x_1] + f[x_{-1},x_0,x_1,x_2]) \\
&\quad + s^2(s^2-1)h^4 f[x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2] \\
&= 0.4554 + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{0.3}{2}\right)((-0.5490) + (-0.5787)) \\
&\quad + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 (0.3)^2(-0.0495) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1\right)(0.3)^3(0.0659 + 0.0.0687) \\
&\quad + \left(-\frac{1}{3}\right)^2\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1\right)(0.3)^4(0.0023) \\
&= 0.5118
\end{aligned}
$$

◀

Untuk lebih memahami materi yang telah diuraikan di atas, perhatikan contoh di bawah ini.

Contoh 4.3.4 Diketahui data, sepereti tabel berikut:

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
$f(x)$	1.0000	1.2214	1.4918	1.8221	2.2255

1. Tentukan aproksimasi nilai dari $f(0.05)$ dengan metode Newton beda maju.

2. Tentukan aproksimasi nilai dari $f(0.75)$ dengan metode Newton beda mundur.

3. Tentukan aproksimasi nilai dari $f(0.45)$ dengan metode Newton beda pusat.

Penyelesaian

1. Untuk menyelesaikan soal tersebut terlebih dahulu buatlah tabel beda maju, yaitu

	$f[x_i]$	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0.0	$\underline{1.0000}$				
		$\underline{1.107}$			
0.2	1.2214		$\underline{0.6125}$		
		1.352		$\underline{0.2270833}$	
0.4	1.4918		0.74875		$\underline{0.0598958}$
		1.6515		0.275	
0.6	1.8221		0.91375		
		2.017			
0.8	2.2255				

karena yang akan dicari adalah $f(0.05)$, maka digunakan beda maju, yaitu hasil perhitungan di bagian atas (bilangan yang bergaris bawah). Sekarang menentukan bilangan s, karena $x = 0.05$ dan $h = 0.2$ maka $x = x_0 + sh$, dan $s = \frac{x-x_0}{h} = \frac{0.05-0.0}{0.2} = \frac{1}{4}$, sehingga

$$
\begin{aligned}
P_4(x) &= P_4(x_0 + sh) = P_4(0.0 + \frac{1}{4}(0.2)) \\
&= f[x_0] + \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} \Delta^1 f(x_0) + \begin{pmatrix} s \\ 2 \end{pmatrix} \Delta^2 f(x_0) \\
&\quad + \begin{pmatrix} s \\ 3 \end{pmatrix} \Delta^3 f(x_0) + \begin{pmatrix} s \\ 4 \end{pmatrix} \Delta^4 f(x_0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_4(x) &= f[x_0] + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \Delta^1 f(x_0) + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 2 \end{pmatrix} \Delta^2 f(x_0) \\
&\quad + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 3 \end{pmatrix} \Delta^3 f(x_0) + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 4 \end{pmatrix} \Delta^4 f(x_0) \\
&= f[x_0] + sh\Delta^1 f(x_0) + s(s-1)h^2 \Delta^2 f(x_0) \\
&\quad + s(s-1)(s-2)h^3 \Delta^3 f(x_0) \\
&\quad + s(s-1)(s-2)(s-3)h^4 \Delta^4 f(x_0) \\
&= 1.0000 + \frac{1}{4}(0.2)(1.107) + \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)(0.2)^2(0.6125) \\
&\quad + \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{7}{4}\right)(0.2)^3(0.2270833) \\
&\quad + \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{7}{4}\right)\left(-\frac{11}{4}\right)(0.2)^4(0.0598958) \\
&= 1.0512659
\end{aligned}
$$

2. Karena yang akan dicari adalah $f(0.75)$, maka tabel yang digunakan adalah tabel beda mundur, yaitu

	$f[x_i]$	∇^1	∇^2	∇^3	∇^4
0.0	1.0000				
		1.107			
0.2	1.2214		0.6125		
		1.352		0.2270833	
0.4	1.4918		0.74875		$\underline{0.0598958}$
		1.6515		$\underline{0.275}$	
0.6	1.8221		$\underline{0.91375}$		
		$\underline{2.017}$			
0.8	$\underline{2.2255}$				

bilangan yang akan digunakan dibagian bawah (bilangan yang bergaris bawah). Sekarang menentukan bilangan s, karena $x = 0.75$ dan $h = 0.2$ maka $x = x_n + sh$, dan $s = \frac{x-x_n}{h} = \frac{0.75-0.8}{0.2} = -\frac{1}{4}$, sehingga

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= P_4(x_n + sh) = P_4(0.8 - \frac{1}{4}(0.2)) \\
&= f[x_n] + \binom{s}{1}\nabla^1 f(x_n) + \binom{s}{2}\nabla^2 f(x_n) \\
&\quad + \binom{s}{3}\nabla^3 f(x_n) + \binom{s}{4}\nabla^4 f(x_n) \\
&= f[x_4] + \binom{-\frac{1}{4}}{1}\nabla^1 f(x_4) + \binom{-\frac{1}{4}}{2}\nabla^2 f(x_4) \\
&\quad + \binom{-\frac{1}{4}}{3}\nabla^3 f(x_4) + \binom{-\frac{1}{4}}{4}\nabla^4 f(x_4) \\
&= f[x_4] + sh\nabla^1 f(x_4) + s(s+1)h^2\nabla^2 f(x_4) \\
&\quad + s(s+1)(s+2)h^3\nabla^3 f(x_4) \\
&\quad + s(s+1)(s+2)(s+3)h^4\nabla^4 f(x_4) \\
&= 2.2255 - \frac{1}{4}(0.2)(2.017) - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)(0.2)^2(0.91375) \\
&\quad - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{7}{4}\right)(0.2)^3(0.275) \\
&\quad - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{7}{4}\right)\left(\frac{11}{4}\right)(0.2)^4(0.0598958) \\
&= 2.1169885
\end{aligned}$$

3. Karena yang akan dicari adalah $f(0.45)$ berada di bagian tengah, maka tabel yang digunakan adalah tabel beda pusat, yaitu
Sebelum membuat tabel beda, tentukan x_0 dari $f(x)$ yang dicari. Karena yang dicari adalah $x = 0.45$ maka x_0 yang paling dekat adalah $x = 0.4$, jadi $x = 0.4$ sebagai x_0, $x = 0.2$ sebagai x_{-1}, $x = 0.0$ sebagai x_{-2}, $x = 0.6$ sebagai x_1, dan $x = 0.8$ sebagai x_2, sehingga tabel beda pusat adalah

	$f[x_i]$	beda 1	beda 2	beda 3	beda 4
$x_{-2} = 0.0$	1.0000				
		1.107			
$x_{-1} = 0.2$	1.2214		0.6125		
		1.352		0.2270833	
$x_0 = 0.4$	1.4918		0.74875		0.0.0598958
		1.6515		0.275	
$x_1 = 0.6$	1.8221		0.91375		
		2.017			
$x_2 = 0.8$	2.2255				

karena yang akan dicari adalah $f(0.45)$, maka digunakan beda pusat, yaitu hasil perhitungan di bagian bawah dan atas dari $x_0 = 0.4$ (bilangan yang bergaris bawah). Sekarang menentukan bilangan s, karena $x = 0.45$ dan $h = 0.2$ maka $x = x_0 + sh$, dan $s = \frac{x-x_0}{h} = \frac{0.45-0.4}{0.2} = \frac{1}{4}$, sehingga

$$
\begin{aligned}
P_4(x) &= P_4(x_0 + sh) = P_4\left(0.4 + \frac{1}{4}(0.2)\right) \\
&= f[x_0] + \frac{sh}{2}(f[x_{-1}, x_0] + f[x_0, x_1]) + s^2h^2 f[x_{-1}, x_0, x_1] \\
&\quad + \frac{s(s^2-1)h^3}{2}(f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1] + f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2]) \\
&\quad + s^2(s^2-1)h^4 f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2] \\
&= 1.4918 + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{0.2}{2}\right)((1.352) + (1.6515)) \\
&\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^2 (0.2)^2(0.74875) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1\right)(0.2)^3(0.2270833 + 0.275) \\
&\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1\right)(0.2)^4(0.0598958) \\
&= 1.5682831
\end{aligned}
$$

◀

Setelah mempelajari contoh di atas, berikut ringkasan kecil untuk Metode Newton beda maju dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$P_n(k) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0)$$

Persamaan untuk metode Newton mundur sebagai berikut.

$$P_n(x) = f[x_n] + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n)$$

Persamaan untuk metode Newton beda terpusat dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
P_n(x) = P_{2m+1}(x) &= f[x_0] + \frac{sh}{2}(f[x_{-1}, x_0] + f[x_0, x_1] + s^2h^2 f[x_{-1}, x_0, x_1] \\
&+ \frac{s(s^2-1)h^3}{2} f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1] + f[x_{-1}, x_0, x_1, x_2]) \\
&+ \cdots + s^2(s^2-1)(s^2-4)\cdots(s^2-(m-1)^2)h^{2m} f[x_{-m}, \cdots, x_m] \\
&+ \frac{s(s^2-1)\cdots(s^2-m^2)h^{2m+1}}{2}(f[x_{-m-1}, \cdots, x_m] + f[x_{-m}, \cdots, x_{m+1}])
\end{aligned}$$

SOAL-SOAL LATIHAN 4.3

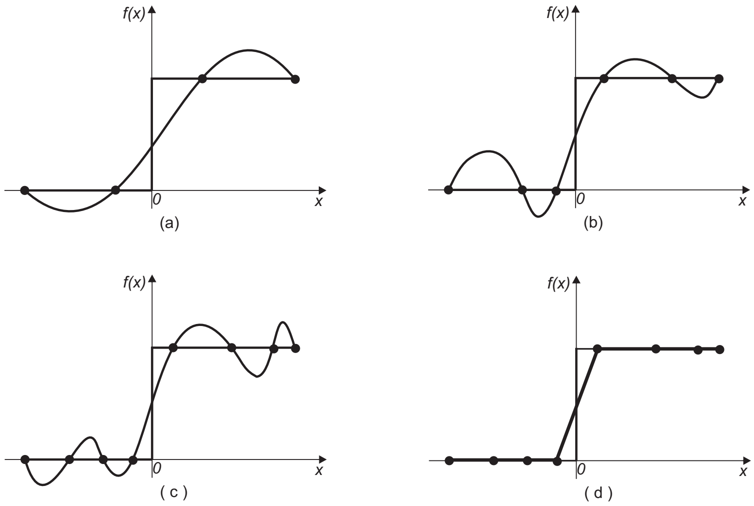
Kerjakan soal-soal berikut ini untuk mengukur tingkat penguasaan Anda atas bahasan yang telah Anda pelajari.

1. Diketahui $f(1) = -6, f(2) = -5.89483, f(3) = -5.65014, f(4) = -5.17788$, dan $f(5) = -4.28172$.
   (a) Tentukan nilai dari $f(1.5)$ dengan menggunakan interpolasi Newton beda terbagi maju.
   (b) Tentukan nilai dari $f(2.5)$ dengan menggunakan interpolasi Newton beda terbagi pusat.
   (c) tentukan nilai dari $f(4.5)$ dengan menggunakan metode interpolasi Newton beda terbagi mundur.
   (d) jika ditambahkan data $f(6) = -3.99583$, tentukan nilai dari $f(5.5)$ dengan menggunakan interpolasi Newton beda terbagi mundur.
   (e) jika digunakan tiga data, yaitu $x = 2, 3, 4$, tentukan nilai dari $f(2.5)$ dengan menggunakan interpolasi Newton beda terbagi maju.

2. Diketahui $f(1) = 0.7651977, f(1.3) = 0.6200860, f(1.6) = 0.4554022, f(1.9) = 0.2818186$, dan $f(2.2) = 0.1103623$.
   (a) Tentukan nilai dari $f(1.2)$ dengan menggunakan interpolasi Newton beda terbagi maju.
   (b) Tentukan nilai dari $f(1.5)$ dengan metode Newton beda terbagi terpusat dengan $x_0 = 1.6$.
   (c) Tentukan nilai dari $f(2)$ dengan metode Newton beda terbagi mundur.
   (d) jika digunakan tiga data, yaitu $x = [1.6\ 1.9\ 2.2]$, tentukan nilai dari $f(2.1)$ dengan menggunakan interpolasi Newton beda terbagi mundur.
   (e) jika digunakan tiga data, yaitu $x = [1.6\ 1.9\ 2.2]$, tentukan nilai dari $f(1.95)$ dengan menggunakan interpolasi Newton beda terbagi mundur.

4.4 *Interpolasi Bagian Demi Bagian*

Salah satu metode yang dapat diterapkan untuk menginterpolasi n data adalah dengan menggunakan polinomial order rendah dalam bentuk fungsi sepotong-sepotong yang dapat menjangkau titik data tersebut. Polinomial ini disebut dengan fungsi



Gambar 4.5: Interpolasi Spline

spline. Gambar 7.1 menunjukkan pendekatan titik-titik data yang membentuk fungsi linier dengan fungsi spline. Terlihat bahwa pendekatan spline linier lebih tepat untuk mendekati titik-titik data tersebut.

Terdapat tiga jenis interpolasi spline bagian demi bagian yang akan dijabarkan pada modul ini, yaitu interpolasi linier bagian demi bagian, interpolasi kuadratik bagian demi bagian, dan interpolasi kubik bagian demi bagian.

4.4.1 Interpolasi Linier Spline

Interpolasi linier bagian demi bagian dapat diterapkan untuk mendekati himpunan titik-titik data yang mendekati fungsi linier. Misalkan terdapat n titik data, yaitu $i = 1, 2, \cdots, n$, yang terbagi kedalam $n-1$ interval. Masing-masing interval i memiliki fungsi spline masing-masing. Untuk interpolasi linier spline bagian demi bagian, masing-masing fungsi menghubungkan dua titik pada masing-masing ujung interval dengan garis lurus. Persamaan garis dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$f_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) \tag{4.31}$$

dimana a_i adalah perpotongan yang didefinisikan sebagai berikut.

$$a_i = f(x_i) \tag{4.32}$$

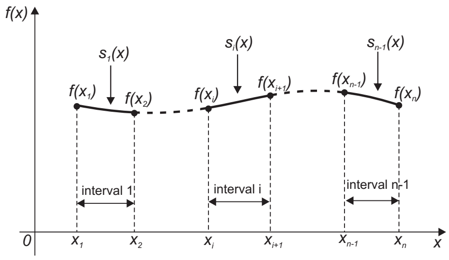
Sedangkan b_i adalah gradien dari garis lurus yang menghubungkan kedua titik.

$$b_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \tag{4.33}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan 4.32 dan 4.33 ke dalam Persamaan 4.31, dapat diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$f_i(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) \tag{4.34}$$

Persamaan 4.34 dapat digunakan untuk mengevaluasi nilai fungsi diantara sebarang titik x_1 sampai dengan x_n.



Gambar 4.6: Interpolasi Linier Spline

CONTOH 4.4.1 Diberikan data berupa suhu sebagai berikut.

i	x_i	$f(x_i)$
1	3.0	2.5
2	4.5	1
3	7	2.5
4	9	0.5

Gunakan interpolasi linier bagian demi bagian untuk mengevaluasi nilai f untuk $x = 3.7$, $x = 5$ dan $x = 8.0$.

Penyelesaian

Untuk mendapatkan nilai f dari $x = 3.7$ atau ditulis $f(3.7)$, karena nilai $x = 3.7$ berada diantara $x_1 = 3.0$ dan $x_2 = 4.5$, maka dengan menggunakan Persamaan 4.34, yaitu

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\
f_1(3.7) &= f(3.0) + \frac{f(4.5) - f(3.0)}{4.5 - 3.0}(3.7 - 3.0) \\
&= 2.5 + \frac{1 - 2.5}{1.5}(0.7) \\
&= 1.8
\end{aligned}$$

Untuk mendapatkan nilai f dari $x = 5$ atau ditulis $f(5)$, karena nilai $x = 5$ berada diantara $x_2 = 4.5$ dan $x_3 = 7$, maka dengan menggunakan Persamaan 4.34, yaitu

$$f_2(x) = f(x_2) + \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}(x - x_2)$$

$$\begin{aligned}
f_2(5) &= f(4.5) + \frac{f(7) - f(4.5)}{7 - 4.5}(5 - 4.5) \\
&= 1 + \frac{2.5 - 1}{2.5}(0.5) \\
&= 1.3
\end{aligned}$$

Sedangkan untuk mendapatkan nilai f dari $x = 8$ atau ditulis $f(8)$, karena nilai $x = 8$ berada diantara $x_3 = 7$ dan $x_4 = 9$, maka dengan menggunakan Persamaan 4.34, yaitu

$$\begin{aligned} f_3(x) &= f(x_3) + \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}(x - x_3) \\ f_3(8) &= f(7) + \frac{f(9) - f(7)}{9 - 7}(8 - 7) \\ &= 2.5 + \frac{0.5 - 2.5}{2}(1) \\ &= 1.5 \end{aligned}$$

◀

Salah satu kelemahan dari interpolasi linier spline bagian demi bagian adalah pendekatan fungsi tidak *smooth*. Terdapat kemungkinan jika sebuah titik data didekati oleh dua spline, yaitu ketika turunan pertama dari fungsi diskontinu pada titik tersebut.

4.4.2 Interpolasi Kuadratik Spline

Pada bagian ini diperkenalkan konsep interpolasi spline dengan menggunakan polinomial order kedua yang dinamakan dengan kuadratik spline. Kuadratik Spline yang diterapkan memiliki turunan pertama yang kontinu pada semua titik pada interval tersebut. Tujuan dari kuadratik spline adalah untuk menurunkan polinomial order kedua pada masing-masing interval. Polinomial pada masing-masing interval dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$f_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 \tag{4.35}$$

Untuk n data yang diketahui, maka terdapat $n - 1$ interval dan setiap interval terdapat tiga peubah yaitu a, b dan c sehingga untuk n data terdapat $3(n-1)$ peubah. Oleh karena itu, untuk mendapatkan nilai peubah yang tunggal, diperlukan $3(n - 1)$ persamaan. Sedangkan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dari $3(n - 1)$ persamaan dengan $3(n - 1)$ peubah, dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

- Fungsi harus melalui semua titik. Hal ini disebut kondisi kontinuitas. Secara matematis dapat dirumuskan sebagai berikut.

  $$f_i = a_i + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2$$

  yang dapat disederhanakan sebagai berikut.

  $$a_i = f_i \tag{4.36}$$

  Sehingga, konstanta pada masing-masing fungsi kuadratik harus sama dengan nilai dari variabel dependen pada masing-masing awal interval. Hasil yang diperoleh ini dapat disubstitusikan kembali ke dalam Persamaan 4.35. Karena nilai dari salah satu koefisien telah diketahui, maka permasalahan yang ada dapat direduksi menjadi $2(n - 1)$ variabel yang tidak diketahui.

- Nilai fungsi dari polinomial harus sama pada masing-masing titiknya. Sehingga untuk titik ke i dapat ditulis sebagai berikut.

  $$\begin{aligned} &f_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 \\ &= f_{i+1} + b_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + c_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^2 \end{aligned} \tag{4.37}$$

dan jika

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

maka Persamaan 4.37, dapat disederhanakan menjadi persamaan fungsi sebagai berikut.

$$f_i + b_i h_i + c_i h_i^2 = f_{i+1} \tag{4.38}$$

Untuk setiap interval didapat

$$\begin{aligned} f_1 + b_1 h_1 + c_1 h_1^2 &= f_2 \\ f_2 + b_2 h_2 + c_2 h_2^2 &= f_3 \\ &\cdots \\ f_{n-1} + b_{n-1} h_{n-1} + c_{n-1} h_{n-1}^2 &= f_n \end{aligned}$$

sehingga ada $(n-1)$ persamaan dengan $2(n-1)$ variabel.

- Turunan pertama pada setiap interval akan mempunyai titik awal dan akhir yang sama. Kondisi ini penting agar antar spline yang ada dapat bergabung secara *smooth*. Turunan pertama dari Persamaan 4.35 dapat dituliskan sebagai berikut.

  $$f_i^{'}(x) = b_i + 2c_i(x - x_i)$$

  Turunan tersebut sama untuk setiap titik yang ada. Sehingga untuk titik $i+1$ dapat ditulis sebagai berikut.

  $$b_i + 2c_i(x_{i+1} - x_i) = b_{i+1} + 2c_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})$$

  sehingga

  $$b_i + 2c_i h_i = b_{i+1} \tag{4.39}$$

  untuk setiap interval adalah

  $$\begin{aligned} b_1 + 2c_1 h_1 &= b_2 \\ b_2 + 2c_2 h_2 &= b_3 \\ &\cdots \\ b_{n-1} + 2c_{n-1} h_1 &= b_n \end{aligned}$$

  sehingga terdapat $n-1$ persamaan.

- Diasumsikan turunan kedua adalah nol pada titik yang pertama, sehingga Persamaan 4.35 dapat dinyatakan sebagai berikut.

  $$c_1 = 0$$

  Interpretasi dari kondisi ini yaitu dua titik pertama dihubungkan oleh sebuah garis lurus.

CONTOH 4.4.2 Diberikan data berupa suhu sebagai berikut.

i	x_i	$f(x_i)$
1	3.0	2.5
2	4.5	1
3	7	2.5
4	9	0.5

Gunakan interpolasi kuadratik bagian demi bagian untuk mengevaluasi nilai f untuk $x = 3.7$, $x = 5$ dan $x = 8.0$.

Penyelesaian

Pada soal, terdapat 4 titik data dan $n = 3$ interval. Dengan menerapkan kondisi kontinuitas dan kondisi turunan kedua adalah nol, maka terdapat $2(n-1)-1 = 2(4-1)-1 = 5$ kondisi yang dibutuhkan. Dengan menggunakan Persamaan 4.38 untuk $i = 1, 2, 3$ dan dengan $c_1 = 0$, maka didapat

$$\begin{aligned} f_1 + b_1 h_1 &= f_2 \\ f_2 + b_2 h_2 + c_2 h_2^2 &= f_3 \\ f_3 + b_3 h_3 + c_3 h_3^2 &= f_4 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Karena kontinuitas turunan, maka tersisa $3 - 1 = 2$ kondisi dan dari Persamaan 4.39 dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned} b_1 &= b_2 \\ b_2 + 2c_2 h_2 &= b_3 \end{aligned} \tag{4.41}$$

dan dengan nilai fungsi di atas dan

$$\begin{aligned} h_1 &= 4.5 - 3.0 = 1.5 \\ h_2 &= 7 - 4.5 = 2.5 \\ h_3 &= 9 - 7 = 2 \end{aligned}$$

sehingga Persamaan 4.40 menjadi

$$\begin{aligned} 2.5 + b_1(1.5) &= 1.0 \\ 1.0 + b_2(2.5) + c_2(2.5)^2 &= 2.5 \\ 2.5 + b_3 2 + c_3 2^2 &= 0.5 \end{aligned}$$

dan Persamaan 4.41 menjadi

$$\begin{aligned} b_1 - b_2 &= 0 \\ b_2 + 2c_2(2.5) - b_3 &= 0 \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} 1.5\ b_1 &= -1.5 \\ 2.5\ b_2 + 6.25\ c_2 &= 1.5 \\ 2\ b_3 + 4\ c_3 &= -2.0 \\ b_1 - b_2 &= 0 \\ b_2 + 5\ c_2 - b_3 &= 0 \end{aligned}$$

dengan demikian terdapat lima persamaan dengan lima variabel, kelima persamaan tersebut dapat diubah kedalam bentuk matriks sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 6.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ c_2 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 1.5 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$b_1 = -1,\ b_2 = -1,\ b_3 = 2.2,\ c_2 = 0.64,\ c_3 = -1.6$$

Sehingga dapat diperoleh fungsi spline kuadratik pada masing-masing interval sebagai berikut.

1. interval pertama, untuk $x = 3$ dan $x = 4.5$, yaitu

$$f_1(x) = 2.5 - (x - 3)$$

2. interval kedua, untuk $x = 4.5$ dan $x = 7.0$, yaitu

$$f_2(x) = 1.0 - (x - 4.5) + 0.64\ (x - 4.5)^2$$

3. interval ketiga, untuk $x = 7.0$ dan $x = 9.0$, yaitu

$$f_3(x) = 2.5 + 2.2\ (x - 7.0) - 1.6\ (x - 7.0)^2$$

Untuk mendapat nilai fungsi di $x = 3.7$ yang berada di interval pertama, maka

$$f_1(3.7) = 2.5 - (3.7 - 3) = 1.8$$

dan untuk nilai fungsi di $x = 5.0$ yang berada di interval kedua, maka

$$f_2(5.0) = 1.0 - (5.0 - 4.5) + 0.64\ (5.0 - 4.5)^2 = 0.66$$

sedangkan untuk nilai fungsi di $x = 8.0$ yang berada di interval ketiga, maka

$$f_3(8.0) = 2.5 + 2.2\ (8.0 - 7.0) - 1.6\ (8.0 - 7.0)^2 = 3.1$$

◀

4.4.3 Interpolasi Kubik Spline

Metode interpolasi kubik bagian demi bagian lebih banyak diterapkan dibandingkan dengan metode linier dan kuadratik, karena memiliki representasi yang paling sederhana dan memiliki tampilan yang paling *smooth*. Tujuan dari metode kubik bagian demi bagian atau kubik spline adalah untuk menurunkan polinomial order ketiga untuk masing-masing interval, secara umum dituliskan sebagai berikut.

$$f_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \tag{4.42}$$

Jika diketahui data sebanyak n, maka akan terdapat $n - 1$ interval dan variabel yang akan dicari sebanyak $4(n - 1)$. Karena variabel yang akan dicari sebanyak $4(n - 1)$, maka untuk mendapatkan penyelesaian unik (satu penyelesaian saja) maka dibutuhkan $4(n - 1)$ persamaan yang berbeda. Seperti halnya kasus kuadratik, untuk mendapatkan persamaan yang diinginkan, yaitu fungsi yang melalui setiap data dan turunan pertamanya sama. Sebagai tambahan, turunan kedua pada titik data juga dijamin sama. Selanjutnya ditambahkan dua kondisi tambahan dengan mengasumsikan turunan kedua pada data awal dan data akhir sama dengan nol. Kondisi tersebut sering dinyatakan sebagai *natural spline*.

Penurunan Persamaan *Cubic Spline*

Pada kasus spline kubik, kondisi pertama yaitu spline harus melalui setiap titik data, sehingga untuk setiap titik data x_i dimasukkan ke Persamaan 4.42, didapat

$$f_i = a_i + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2 + d_i(x_i - x_i)^3$$

atau

$$a_i = f_i \tag{4.43}$$

Sehingga, untuk akhir dari interval ke-i mempunyai nilai yang sama dengan nilai awal dari interval berikutnya yaitu interval ke-$(i+1)$, sehingga

$$f_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = f_{i+1} \tag{4.44}$$

dengan $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Kemudian, turunan pertama dari titik interior harus sama. Sehingga dapat diperoleh persamaan sebagai berikut

$$f_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2 \tag{4.45}$$

Kesamaan dari turunan titik ke-$(i+1)$ dapat ditulis sebagai berikut

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} \tag{4.46}$$

Sedangkan turunan keduanya adalah

$$f_i''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i) \tag{4.47}$$

Kesamaan dari turunan kedua pada titik ke-$(i+1)$ dapat ditulis sebagai berikut

$$c_i + 3d_i h_i = c_{i+1} \tag{4.48}$$

dari Persamaan 4.48 diperoleh

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \tag{4.49}$$

jika disubstitusikan ke Persamaan 4.44, diperoleh

$$f_i + b_i h_i + \frac{h_i^2}{3}(2c_i + c_{i+1}) = f_{i+1} \tag{4.50}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan 4.49 ke dalam Persamaan 4.46, dapat diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$b_{i+1} = b_i + h_i(c_i + c_{i+1}) \tag{4.51}$$

Dari Persamaan 4.50, bisa diselesaikan sebagai berikut.

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}) \tag{4.52}$$

Dengan mengurangi indeks dari Persamaan 4.52, dapat diperoleh:

$$b_{i-1} = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{3}(2c_{i-1} + c_i) \tag{4.53}$$

Dengan mengurangi indeks dari Persamaan 4.51, dapat diperoleh:

$$b_i = b_{i-1} + h_{i-1}(c_{i-1} + c_i) \tag{4.54}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan 4.52 dan 4.53 ke dalam Persamaan 4.54, dapat diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - 3\frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \tag{4.55}$$

Selanjutnya diperkenalkan notasi sebagai berikut.

$$f[x_i, x_j] = \frac{f_i - f_j}{x_i - x_j}$$

Sehingga Persamaan 4.55 dapat ditulis ulang sebagai berikut.

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} - h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3(f[x_{i+1}, x_i] - f[x_i, x_{i-1}]) \tag{4.56}$$

Dengan menerapkan asumsi bahwa turunan kedua pada awal dan akhir titik data sama dengan nol. Sehingga persamaan akhir dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 3(f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]) \\ \vdots \\ \vdots \\ 3(f[x_n, x_{n-1}] - f[x_{n-1}, x_{n-2}]) \\ 0 \end{bmatrix}$$

CONTOH 4.4.3 Diberikan data berupa suhu sebagai berikut.

i	x_i	$f(x_i)$
1	3.0	2.5
2	4.5	1
3	7	2.5
4	9	0.5

Gunakan interpolasi kubik bagian demi bagian untuk mengevaluasi nilai f untuk $x = 3.7$, $x = 5$ dan $x = 8.0$.

Penyelesaian

Pada soal, terdapat 4 titik data dengan

$$\begin{aligned} f_1 &= 2.5 & h_1 &= 4.5 - 3.0 = 1.5 \\ f_2 &= 1.0 & h_2 &= 7.0 - 4.5 = 2.5 \\ f_3 &= 2.5 & h_3 &= 9.0 - 7.0 = 2.0 \\ f_4 &= 0.5 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} f[x_2, x_1] &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 2.5}{4.5 - 3.0} = -1.0 \\ f[x_3, x_2] &= \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{2.5 - 1.0}{7.0 - 4.5} = 0.6 \\ f[x_4, x_3] &= \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} = \frac{0.5 - 2.5}{9.0 - 7.0} = -1.0 \end{aligned}$$

dengan menggunakan Persamaan 4.56, yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3(f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]) \\ 3(f[x_4, x_3] - f[x_3, x_2]) \\ 0 \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 8 & 2.5 & 0 \\ 0 & 2.5 & 9.0 & 2.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4.8 \\ -4.8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

diperoleh

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 & c_2 &= 0.839543726 \\ c_1 &= -0.766539924 & c_4 &= 0 \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan Persamaan 4.49, yaitu

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$$

dan Persamaan 4.52, yaitu

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$$

dapat dihitung nilai b dan d sebagai berikut.

$$\begin{aligned} b_1 &= -1.419771863 & d_1 &= 0.186565272 \\ b_2 &= -0.160456274 & d_2 &= -0.21414487 \\ b_3 &= 0.022053232 & d_3 &= 0.127756654 \end{aligned}$$

dan

$$a_1 = f_1 = 2.5$$
$$a_2 = f_2 = 1.0$$
$$a_3 = f_3 = 2.5$$

Dengan mensubstitusikan kedalam Persamaan 4.42, dapat diperoleh persamaan kubik spline untuk masing-masing interval sebagai berikut.

1. pada interval pertama, untuk $x_1 = 3.0$ sampai dengan $x_2 = 4.5$, persamaan kubiknya adalah

$$f_1(x) = 2.5 - 1.419771863(x-3) + 0.186565272(x-3)^3$$

2. pada interval kedua, untuk $x_1 = 4.5$ sampai dengan $x_2 = 7.0$, persamaan kubiknya adalah

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 1 - 0.160456274(x-4.5) + 0.839543726(x-4.5)^2 \\ &\quad -0.21414487(x-4.5)^3 \end{aligned}$$

3. pada interval ketiga, untuk $x_1 = 4.5$ sampai dengan $x_2 = 7.0$, persamaan kubiknya adalah

$$\begin{aligned} f_3(x) &= 2.5 + 0.022053232(x-7) - 0.766539924(x-7)^2 \\ &\quad +0.127756654(x-7)^3 \end{aligned}$$

Untuk mencari nilai fungsi untuk $x = 3.7$, $x = 5.0$ dan $x = 8.0$, maka

1. karena $x = 3.7$ pada interval pertama, maka persamaan yang dipakai adalah f_1, yaitu

$$\begin{aligned} f_1(3.7) &= 2.5 - 1.419771863(3.7-3) + 0.186565272(3.7-3)^3 \\ &= 2.5 - 1.419771863(0.7) + 0.186565272(0.7)^3 \\ &= 1.570151747 \end{aligned}$$

2. karena $x = 5.0$ pada interval pertama, maka persamaan yang dipakai adalah f_2, yaitu

$$\begin{aligned} f_2(5) &= 1 - 0.160456274(5-4.5) + 0.839543726(5-4.5)^2 \\ &\quad -0.21414487(5-4.5)^3 \\ &= 1 - 0.160456274(0.5) + 0.839543726(0.5)^2 \\ &\quad -0.21414487(0.5)^3 \\ &= 1.102889686 \end{aligned}$$

3. karena $x = 8.0$ pada interval pertama, maka persamaan yang dipakai adalah f_3, yaitu

$$\begin{aligned} f_3(8.0) &= 2.5 + 0.022053232(8-7) - 0.766539924(8-7)^2 \\ &\quad +0.127756654(8-7)^3 \\ &= 2.5 + 0.022053232(1) - 0.766539924(1)^2 \\ &\quad +0.127756654(1)^3 \\ &= 1.88326996 \end{aligned}$$

◀

Untuk lebih memahami materi yang telah diuraikan di atas, perhatikan contoh di bawah ini.

CONTOH 4.4.4 Diketahui sebuah data sebagai berikut.

i	x_i	$f(x_i)$
1	2.0	5.3
2	5.5	9.9
3	11	10.2
4	13	9.35
5	16	7.2
6	18	6.2

Tentukan nilai fungsi untuk $x = 6.0$, $x = 12.0$ dan $x = 17$ dengan menggunakan interpolasi linier dan interpolasi kuadratik?

Penyelesaian

Berdasarkan data di atas, maka

$$\begin{aligned} h_1 &= x_2 - x_1 = 5.5 - 2.0 = 3.5 \\ h_2 &= x_3 - x_2 = 11 - 5.5 = 5.5 \\ h_3 &= x_4 - x_3 = 13 - 11 = 2.0 \\ h_4 &= x_5 - x_4 = 16 - 13 = 3.0 \\ h_5 &= x_6 - x_5 = 18 - 16 = 2.0 \end{aligned}$$

1. Interpolasi Linier.
   Dengan menggunakan Persamaan 4.34, yaitu

   $$f_i(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

   maka interpolasi linier pada interval pertama adalah

   $$\begin{aligned} f_1(x) &= 5.3 + \frac{9.9 - 5.3}{5.5 - 2}(x - 2) \\ &= 5.3 + \frac{4.6}{3.5}(x - 2) \end{aligned}$$

   interpolasi linier pada interval kedua adalah

   $$\begin{aligned} f_2(x) &= 9.9 + \frac{10.2 - 9.9}{11 - 5.5}(x - 5.5) \\ &= 9.9 + \frac{0.3}{5.5}(x - 5.5) \end{aligned}$$

   interpolasi linier pada interval ketiga adalah

   $$\begin{aligned} f_3(x) &= 10.2 + \frac{9.35 - 10.2}{13 - 11}(x - 11) \\ &= 10.2 - \frac{0.67}{2}(x - 11) \end{aligned}$$

interpolasi linier pada interval keempat adalah

$$\begin{aligned} f_4(x) &= 9.35 + \frac{7.2 - 9.35}{16 - 13}(x - 13) \\ &= 9.35 - \frac{2.15}{3}(x - 13) \end{aligned}$$

interpolasi linier pada interval kelima adalah

$$\begin{aligned} f_5(x) &= 7.2 + \frac{6.2 - 7.2}{18 - 16}(x - 16) \\ &= 7.2 - \frac{1}{2}(x - 16) \end{aligned}$$

karena nilai fungsi yang dicari untuk $x = 6.0$, terletak pada interval kedua, maka

$$f_2(6) = 9.9 + \frac{0.3}{5.5}(6 - 5.5) = 9.927272727.. = 9.9\overline{27}$$

dan untuk $x = 12.0$ terletak pada interval ketiga, maka

$$f_3(12) = 10.2 - \frac{0.67}{2}(12 - 11) = 9.865$$

dan untuk $x = 17.0$ terletak pada interval kelima, maka

$$f_5(17) = 7.2 - \frac{1}{2}(17 - 16) = 6.7$$

2. interpolasi kuadratik Untuk menyelesaikan dengan interpolasi kuadratik dengan 6 titik data, sehingga ada 5 interval dengan

$$a_1 = 5.3, a_2 = 9.9, a_3 = 10.2, a_4 = 9.35, a_5 = 7.2$$

Dengan menggunakan Persamaan 4.38 untuk $i = 1, 2, 3, 4, 5$ dan dengan $c_1 = 0$, maka didapat

$$\begin{aligned} f_1 + b_1h_1 &= f_2 \\ f_2 + b_2h_2 + c_2h_2^2 &= f_3 \\ f_3 + b_3h_3 + c_3h_3^2 &= f_4 \\ f_4 + b_3h_4 + c_4h_4^2 &= f_5 \\ f_5 + b_3h_5 + c_5h_5^2 &= f_6 \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} 5.3 + 3.5b_1 &= 9.9 \\ 9.9 + 5.5b_2 + 30.25c_2 &= 10.2 \\ 10.2 + 2b_3 + 4c_3 &= 9.35 \\ 9.35 + 3b_3 + 9c_4 &= 7.2 \\ 7.2 + 2b_3 + 4c_5 &= 6.2 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Persamaan 4.39 dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned} b_1 &= b_2 \\ b_2 + 2c_2h_2 &= b_3 \\ b_3 + 2c_3h_3 &= b_4 \\ b_4 + 2c_4h_4 &= b_5 \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} b_1 - b_2 &= 0 \\ b_2 - b_3 + 11c_2 &= 0 \\ b_3 - b_4 + 4c_3 &= 0 \\ b_4 - b_5 + 6c_4 &= 0 \end{aligned}$$

dengan demikian terdapat 9 persamaan dengan 9 variabel, 9 persamaan tersebut dapat diubah kedalam bentuk matriks sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 3.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.5 & 0 & 0 & 0 & 30.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.6 \\ 0.3 \\ -0.67 \\ 2.15 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$b_1 = 1.3143, b_2 = 1.3143, b_3 = -1.2052, b_4 = 0.5352, b_5 = 0.8981$$

dan

$$c_1 = 0, c_2 = -0.2290, c_3 = 0.4351, c_4 = 0.0605, c_5 = -0.6991$$

serta

$$a_1 = 5.3, a_2 = 9.9, a_3 = 10.2, a_4 = 9.35, a_5 = 7.2$$

Sehingga dapat diperoleh fungsi spline kuadratik pada masing-masing interval sebagai berikut. maka interpolasi linier pada interval pertama adalah

$$f_1(x) = 5.3 + 1.3143(x - 2)$$

interpolasi linier pada interval kedua adalah

$$f_2(x) = 9.9 + 1.3143(x - 5.5) - 0.2290(x - 5.5)^2$$

interpolasi linier pada interval ketiga adalah

$$f_3(x) = 10.2 - 1.2052(x - 11) + 0.4351(x - 11)^2$$

interpolasi linier pada interval keempat adalah

$$f_4(x) = 9.35 + 0.5352(x - 13) + 0.0605(x - 13)^2$$

interpolasi linier pada interval kelima adalah

$$f_5(x) = 7.2 + 0.8981(x - 16) - 0.6991(x - 16)^2$$

karena nilai fungsi yang dicari untuk $x = 6.0$, terletak pada interval kedua, maka

$$f_2(6) = 9.9 + 1.3143(6 - 5.5) - 0.2290(6 - 5.5)^2 = 10.4999$$

dan untuk $x = 12.0$ terletak pada interval ketiga, maka

$$f_3(12) = 10.2 - 1.2052(12 - 11) + 0.4351(12 - 11)^2 = 9.4299$$

dan untuk $x = 17.0$ terletak pada interval kelima, maka

$$f_5(17) = 7.2 + 0.8981(17 - 16) - 0.6991(17 - 16)^2 = 7.399$$

◀

Dari contoh dan uraian di atas, perhatikan ringkasan untuk mendapat interpolasi linier, kuadart dan kubik, di bawah ini. Untuk mendapatkan interpolasi linier bagian demi bagian, gunakan persamaan berikut

$$f_i(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

untuk $i = 1, 2, \cdots, n - 1$ dengan n data.

Sedangkan untuk mendapatkan interpolasi kuadratik bagian demi bagian, yaitu

$$f_i = a_i + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2$$

ikuti langkah berikut

1. untuk mendapat koefisien a_i gunakan

$$a_i = f_i$$

2. Nilai fungsi dari polinomial harus sama pada masing-masing titiknya. Sehingga untuk titik ke-i, dengan $h_i = x_{i+1} - x_i$, maka didapat

$$f_i + b_i h_i + c_i h_i^2 = f_{i+1}$$

3. Turunan pertama pada setiap interval akan mempunyai titik awal dan akhir yang sama, sehingga

$$b_i + 2c_i h_i = b_{i+1}$$

4. Diasumsikan turunan kedua adalah nol pada titik yang pertama, sehingga

$$c_1 = 0$$

Tulis semua persamaan dalam sistem persamaan, kemudian selesaikan.

Dan untuk mendapatkan interpolasi kubik bagian demi bagian, yaitu

$$f_i = a_i + b_i(x_i - x_i) + c_i(x_i - x_i)^2 + d_i(x_i - x_i)^3$$

1. setiap titik selalu dilewati, sehingga

$$a_i = f_i$$

2. setiap akhir dari interval mempunayi nilai yang sama, sehingga

$$f_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = f_{i+1}$$

dengan $h_i = x_{i+1} - x_i$.

3. turunan pertama dari suatu interval dengan interval berikutnya, mempunyai nilai yang sama, sehingga

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}$$

4. begitu juga untuk turunan kedua, sehingga

$$c_i + 3d_i h_i = c_{i+1}$$

5. lakukan substitusi, sedemikian hingga

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} - h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3(f[x_{i+1}, x_i] - f[x_i, x_{i-1}])$$

dengan

$$f[x_i, x_j] = \frac{f_i - f_j}{x_i - x_j}$$

Sehingga persamaan akhir dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 3(f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]) \\ \vdots \\ \vdots \\ 3(f[x_n, x_{n-1}] - f[x_{n-1}, x_{n-2}]) \\ 0 \end{bmatrix}$$

SOAL-SOAL LATIHAN 4.4

Kerjakan soal-soal berikut ini.

1. Diberikan data sebagai berikut.

x	1	2	2.5	3	4	5
$f(x)$	1	5	7	8	2	1

   (a) Dengan metode interpolasi linier bagian demi bagian, estimasi nilai $x = 3.5$ dan $x = 4.6$.
   (b) dengan menggunakan interpolasi kuadratik bagian demi bagian, estimasi nilai dari $x = 3.5$ dan $x = 4.6$.
   (c) dengan menggunakan interpolasi kubik bagian demi bagian, estimasi nilai dari $x = 3.5$ dan $x = 4.6$.

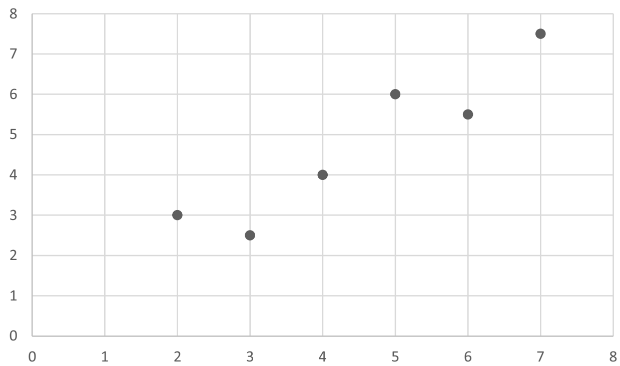
2. Diberikan data sebagai berikut.

Kedalaman (m)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
Suhu (celcius)	70	70	55	22	13	10	10

   (a) Dengan metode interpolasi linier bagian demi bagian, estimasi nilai $x = 0.75$ dan $x = 2.7$.
   (b) dengan menggunakan interpolasi kuadratik bagian demi bagian, estimasi nilai dari $x = 0.75$ dan $x = 2.7$.
   (c) dengan menggunakan interpolasi kubik bagian demi bagian, estimasi nilai dari $x = 0.75$ dan $x = 2.7$.

3. Diketahui empat pasangan titik, yaitu $(1, 3), (2, 6), (3, 19)$, dan $(5, 99)$, tentukan interpolasi kubik.

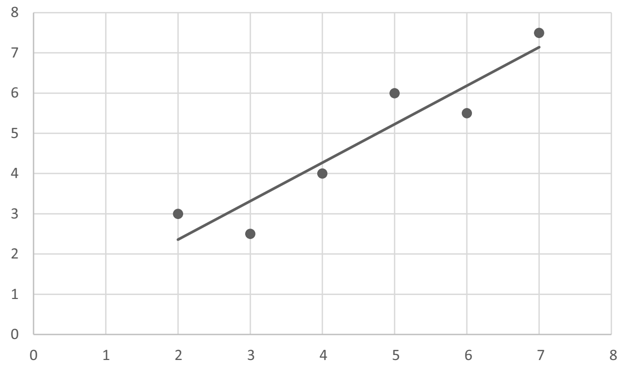
4.5 Metode Kuadrat Terkecil



Gambar 4.7: Plot data

Metode kuadrat terkecil dimaksudkan adalah jumlah kuadrat dari galat yang didapat dari suatu data terhadap persamaan yang dibuat atau persamaan didapatkan sekecil mungkin. Misal data yang tersedia seperti pada Gambar 4.7. Misal ada n data itu adalah (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), $\cdots$, (x_n, y_n).

Jika diinginkan nilai y_i di x_i, namun nilai x_i diantara nilai data yang ada atau nilai x_i tidak tepat pada data yang ada, maka perlu dicari nilai pendekatan dari data tersebut. Oleh karena perlu dikenalkan beberapa metode untuk mendapatkan nilai tersebut.



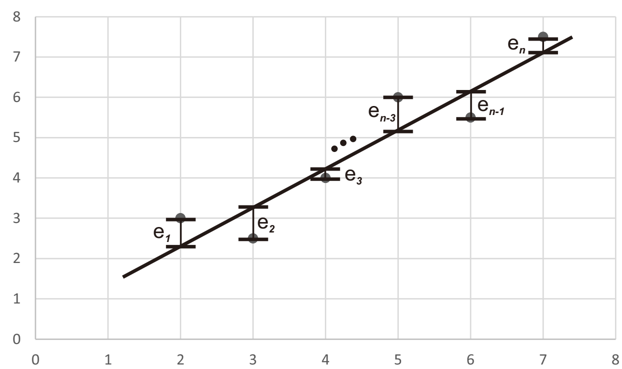
Gambar 4.8: Pendekatan linear

4.5.1 Regresi Linear

Metode kuadrat terkecil yang sederhana adalah Regresi linear. Metode ini menganggap bahwa kumpulan data yang ada dianggap sebuah garis, misal garis yang dibuat pada data di atas seperti pada Gambar 4.8.

Sekarang, bagaimana cara mendapatkan garis atau persamaan garis tersebut. Misal persamaan garis tersebut atau persamaan garis yang optimal adalah

$$y = a_0 + a_1 x$$



Gambar 4.9: Pendekatan linear

Perhatikan Gambar 4.9, gambar tersebut merupakan kesalahan atau galat antara nilai data yang ada dengan garis yang diharapkan, maka untuk mendapatkan galat yang paling kecil, perlu dihitung jumlah kuadrat dari setiap galat, yaitu

$$e_i^2 = (y_i - (a_0 + a_1 x))^2$$

atau

$$e_i^2 = (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

kemudian jumlahkan untuk semua data, sehingga

$$\sum_{i=0}^{n} e_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

Misal jumlah kuadrat dari semua data adalah S, atau

$$S = \sum_{i=0}^{n} e_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$$

maka S adalah fungsi dari dua peubah, yaitu a_0 dan a_1. Untuk mendapatkan nilai a_0 dan a_1, turunkan S ke a_0 dan a_1, yaitu

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta a_0} &= -2 \sum_{i=0}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i) \\
\frac{\delta S}{\delta a_1} &= -2 \sum_{i=0}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i
\end{aligned}$$

akan minimum kalau $\frac{\delta S}{\delta a_0} = 0$ dan $\frac{\delta S}{\delta a_1} = 0$, maka

$$\begin{aligned}
0 &= -2 \sum_{i=0}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i) \\
0 &= -2 \sum_{i=0}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i
\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=0}^{n} y_i - \sum_{i=0}^{n} a_0 - a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i \\
0 &= \sum_{i=0}^{n} y_i x_i - a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i - a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2
\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}
a_0 \quad n + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i &= \sum_{i=0}^{n} y_i \\
a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=0}^{n} y_i x_i
\end{aligned}$$

dengan menghilangkan batas sigmanya, maka kedua persamaan dapat ditulis lebih sederhana seperti berikut

$$\begin{aligned}
a_0 \quad n + a_1 \sum x_i &= \sum y_i \\
a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 &= \sum y_i x_i
\end{aligned}$$

dapat ditulis dalam bentuk matriks, seperti

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \end{pmatrix} \tag{4.57}$$

hal ini merupakan dua persamaan dengan dua peubah, yaitu a_0 dan a_1, dan jika diselesaikan dengan aturan Cramer didapat

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_i \\ \sum y_i x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum y_i x_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \tag{4.58}$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum y_i x_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{n \sum y_i x_i - \sum y_i \sum x_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \tag{4.59}$$

Dengan demikian dapat ditemukan persamaan garis atau persamaan regresi linear yang diinginkan. Untuk mempermudah pemahaman tentang regresi linear tersebut, perhatikan contoh berikut.

Contoh 4.5.1 Diberikan data sebagai berikut.

x	0	2	4	6	9	11	12	15
y	5	6	7	6	9	8	7	10

Carilah persamaan regresi linear dan galat kuadrat dari data tersebut?

Penyelesaian

Untuk mendapat persamaan regresi linear, maka perlu diketahui bahwa jumlah data sebanyak $n = 8$ kemudian hitung $\sum y_i$, $\sum x_i$, $\sum y_i x_i$, $(\sum x_i)^2$, dan $\sum x_i^2$, dalam tabel berikut

i	x_i	y_i	$y_i x_i$	x_i^2	$\tilde{y}_i$	er^2
1	0	5	0	0	5.28013	0.078473
2	2	6	12	4	5.81433	0.034473
3	4	7	28	16	6.34853	0.424408
4	6	6	36	36	6.88274	0.779223
5	9	9	81	81	7.68404	1.731753
6	11	8	88	121	8.21824	0.047629
7	12	7	84	144	8.48534	2.206241
8	15	10	150	225	9.28665	0.508875
$\sum$	59	58	479	627		5.811075

dengan menggunakan Persamaan 4.57 di dapat matriks berikut

$$\begin{pmatrix} 8 & 59 \\ 59 & 627 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 479 \end{pmatrix}$$

dengan menggunakan Rumus 4.58 didapat

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{\begin{vmatrix} 58 & 59 \\ 479 & 627 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 59 \\ 59 & 627 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{58 \times 627 - 59 \times 479}{8 \times 627 - 59^2} \\
&= 5.28013
\end{aligned}
$$

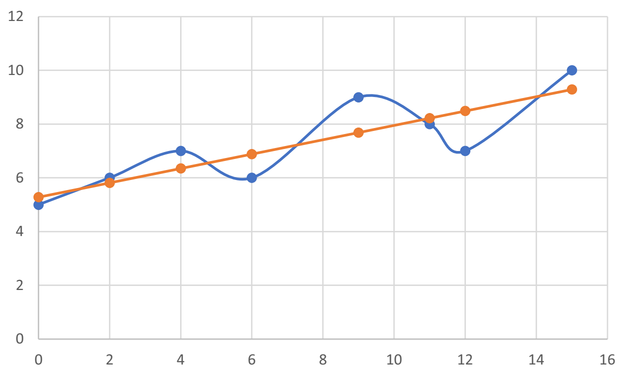
dan Rumus 4.59 didapat

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 8 & 58 \\ 59 & 479 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 59 \\ 59 & 627 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{8 \times 479 - 58 \times 59}{8 \times 627 - 59^2} \\
&= 0.2671
\end{aligned}
$$

sehingga persamaan regresi linear yang diminta adalah

$$\tilde{y} = 5.28013 + 0.2671x$$

dan jika dibandingkan dengan data yang ada, diperoleh galat kuadat seperti tabel di atas atau dapat di lihat sketsa grafiknya pada Gambar 4.10, dengan total galat kuadrat sebesar 5.811075.



Gambar 4.10: Sketsa grafik dari data dan persamaan regresi linear

◀

Contoh berikut akan memudahkan pemahaman metode kuadrat terkecil.

Contoh 4.5.2 Diberikan data sebagai berikut.

x	4.0	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
y	2.56	13.18	30.11	42.05	67.53	95.14	124.87	156.73	199.50	226.72

Carilah persamaan regresi linear dan galat kuadrat dari data tersebut?

Penyelesaian

Untuk mendapat persamaan regresi linear, maka perlu diketahui bahwa jumlah data sebanyak $n = 10$ kemudian hitung $\sum y_i$, $\sum x_i$, $\sum y_i x_i$, $(\sum x_i)^2$, dan $\sum x_i^2$, dalam tabel berikut

i	x_i	y_i	$y_i x_i$	x_i^2	$\tilde{y}_i$	er^2
1	4	2.56	10.24	16	-5.80017	69.89244
2	4.2	13.18	55.356	17.64	8.616734	20.8234
3	4.5	30.11	135.495	20.25	30.24209	0.017447
4	4.7	42.05	197.635	22.09	44.65899	6.806842
5	5.1	67.53	344.403	26.01	73.49280	35.55498
6	5.5	95.14	523.270	30.25	102.3266	51.64731
7	5.9	124.87	736.733	34.81	131.1604	39.5893
8	6.3	156.73	987.399	39.69	159.9942	10.65514
9	6.8	199.50	1356.600	46.24	196.0365	11.99597
10	7.1	226.72	1609.712	50.41	217.6618	82.05035
$\sum$	54.1	958.39	5956.39	303.39		329.0132

dengan menggunakan Persamaan 4.57 di dapat matriks berikut

$$\begin{pmatrix} 10 & 54.1 \\ 54.1 & 303.39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 958.39 \\ 5956.39 \end{pmatrix}$$

dengan menggunakan Rumus 4.58 didapat

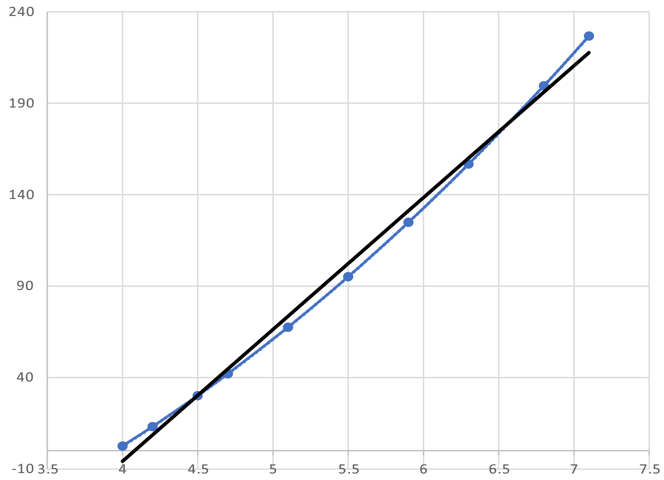
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\begin{vmatrix} 958.39 & 54.1 \\ 5956.39 & 303.39 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 54.1 \\ 54.1 & 303.39 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{958.39 \times 303.39 - 54.1 \times 5956.39}{10 \times 303.39 - 54.1^2} \\ &= -294.138 \end{aligned}$$

dan Rumus 4.59 didapat

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 10 & 958.39 \\ 54.1 & 5956.39 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 54.1 \\ 54.1 & 303.39 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{10 \times 5956.39 - 958.39 \times 54.1}{10 \times 303.39 - 54.1^2} \\ &= 72.0845 \end{aligned}$$

sehingga persamaan regresi linear yang diminta adalah

$$\tilde{y} = -294.138 + 72.0845x$$



Gambar 4.11: Sketsa grafik dari data dan persamaan regresi linear

dan jika dibandingkan dengan data yang ada, diperoleh galat kuadat seperti tabel di atas atau dapat di lihat sketsa grafiknya pada Gambar 4.11, dengan total galat kuadrat sebesar 329.0132.

◀

SOAL-SOAL LATIHAN 4.5

1. Diketahui data dari Tahanan (R) dan Suhu (T) pada suatu alat, yaitu

T	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
R	28	34	36	37	43	43	45	49	50	57

   Dapatkan persamaan regresi linear terbaik dari data tersebut dan tentukan pula galat kuadrat terkecilnya?

2. Diketahui data eksperimen pada suatu alat, yaitu

x	6	7	11	15	17	21	23	27	31	37
y	29	23	27	17	21	15	11	7	11	3

   Dapatkan persamaan regresi linear terbaik dari data tersebut dan tentukan pula galat kuadrat terkecilnya?

3. Diketahui data sebagai berikut

t	2	4	6	8	10	12	14	17	20
y	3	2	5	2	8	7	6	9	12

   Dapatkan persamaan regresi linear terbaik dari data tersebut dan tentukan pula galat kuadrat terkecilnya?

4. Carilah persamaan regresi linear dari data berikut ini

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	1	1.5	2	3	4	5.5	7.75	10	13

5. Daftar berikut adalah nilai pekerjaan rumah dan nilai ujian akhir dari 30 mahasiswa. Temukan persamaan regresi linear dari data ini, dan gunakan garis ini untuk menentukan nilai pekerjaan rumah yang diperlukan untuk memprediksi nilai minimal.

PR	Ujian	PR	Ujian	PR	Ujian
302	45	343	83	234	51
325	72	290	74	337	53
285	54	326	76	351	100
339	54	233	57	339	67
334	79	254	45	343	83
322	65	323	83	314	42
331	99	337	99	344	79
279	63	337	70	185	59
316	65	304	62	340	75
347	99	319	66	316	45

6. Diberikan data berikut ini

x	4.0	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
y	102.56	113.18	130.11	142.05	167.53	195.14	224.87	256.73	299.50	326.72

Tentukan regresi linear, dan hitung kesalahannya.

7. Sama seperti Soal no 7, dengan data berikut ini

x	0.2	0.3	0.6	0.9	1.1	1.3	1.4	1.6
y	0.05045	0.09843	0.33277	0.72661	1.09721	1.56971	1.84871	2.50151

4.5.2 Regresi Polinomial

Bentuk umum polinomial derajat n adalah

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

dengan pangkat tertinggi adalah n dan $(n+1)$peubah yaitu a_0, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n. Seandainya ada m data dengan $n < m - 1$, yaitu

$$\{(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, 3, \cdots, m\}$$

maka galat kuadrat terkecil yang terjadi adalah

$$\begin{aligned}
E &= \sum_{i=1}^{m} (y_i - P_n(x_i))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m} y_i P_n(x_i) + \sum_{i=1}^{m} (P_n(x_i))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j\right) y_i + \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{m} y_i^2 - 2\sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^j y_i\right) + \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} a_j a_k \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k}\right)
\end{aligned}$$

Untuk mendapatkan E minimal, maka diperlukan

$$\frac{\delta E}{\delta a_j} = 0, \quad \text{untuk} \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n$$

atau

$$0 = \frac{\delta E}{\delta a_j} = -2\sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j + 2\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k}$$

maka akan ada $n+1$ persamaan dan ada $n+1$ variabel, yaitu

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} x_{j+k} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j \quad \text{untuk} \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{4.60}$$

atau

$$\begin{aligned}
a_0\sum_{i=1}^{m} x_i^0 + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^1 + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \cdots + a_n\sum_{i=1}^{m} x_i^n &= \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^0 \\
a_0\sum_{i=1}^{m} x_i^1 + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^3 + \cdots + a_n\sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} &= \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^1 \\
\vdots \qquad &\vdots \qquad \vdots \\
a_0\sum_{i=1}^{m} x_i^n + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^{n+2} + \cdots + a_n\sum_{i=1}^{m} x_i^{2n} &= \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^n
\end{aligned}$$

Polinomial Derajat 2

Untuk memperjelas, bagaimana kuadrat terkecil dari polinomial derajat 2, perhatikan polinomial derajat 2, berikut

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

dengan pangkat tertinggi adalah 2 dan $(2+1)$peubah yaitu a_0, a_1, dan a_2. Seandainya ada m data dengan $2 < m - 1$, yaitu

$$\{(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, 3, \cdots, m\}$$

maka galat kuadrat terkecilnya adalah

$$E = \sum_{i=1}^{m} (y_i - P_2(x_i))^2$$

dan dengan menggunakan Persamaan 4.60, yaitu

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} x_{j+k} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^j \quad \text{untuk} \quad j = 0, 1, 2.$$

dan diuraikan menjadi

$$\begin{aligned}
a_0\sum_{i=1}^{m} x_i^0 + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^1 + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^0 \\
a_0\sum_{i=1}^{m} x_i^1 + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^3 &= \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^1 \\
a_0\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_1\sum_{i=1}^{m} x_i^3 + a_2\sum_{i=1}^{m} x_i^4 &= \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^2
\end{aligned}$$

atau lebih sederhana, seperti berikut

$$
\begin{aligned}
a_0 m + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{m} y_i \\
a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^3 &= \sum_{i=1}^{m} y_i x_i \\
a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{m} x_i^4 &= \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^2
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

Terlihat ada tiga persamaan dengan tiga peubah yang belum diketahui, yaitu a_0, a_1 dan a_2. Dengan menggunakan metode Cramer, sistem persamaan tersebut dapat ditulis

$$
\begin{pmatrix} m & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i x_i^2 \end{pmatrix}
$$

Perhatikan contoh dibawah ini.

Contoh 4.5.3 Diberikan data sebagai berikut.

x	0	2	4	6	9	11	12	15
y	5	6	7	6	9	8	7	10

Carilah persamaan regresi polinomial order dua dan galat kuadrat dari data tersebut?

Penyelesaian

Untuk mendapat polinomial regresi order 2, maka perlu diketahui bahwa jumlah data sebanyak $m = 8$ kemudian hitung $\sum y_i$, $\sum x_i$, $\sum y_i x_i$, $\sum x_i^2$, $\sum x_i^3$, $\sum x_i^4$, $\sum y_i x_i$, dan $\sum y_i x_i^2$, dalam tabel berikut

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$	$\tilde{y}_i$	er^2
1	0	5	0	0	0	0	0	5.336208	0.113036
2	2	6	4	8	16	12	24	5.823248	0.031241
3	4	7	16	64	256	28	112	6.325104	0.455484
4	6	6	36	216	1296	36	216	6.841776	0.708586
5	9	9	81	729	6561	81	729	7.644563	1.837210
6	11	8	121	1331	14641	88	968	8.198274	0.039312
7	12	7	144	1728	20736	84	1008	8.480685	2.192428
8	15	10	225	3375	50625	150	2250	9.350143	0.422315
$\sum$	59	58	627	7451	94131	479	5307		5.799613

dari tabel di atas ini diperolehsistem persamaan linear berikut

$$
\begin{aligned}
8\ a_0 + \quad 59\ a_1 + \quad 627\ a_2 &= 58 \\
59\ a_0 + \quad 627\ a_1 + \ 7451\ a_3 &= 479 \\
627\ a_0 + 7451\ a_1 + 94131\ a_2 &= 5307
\end{aligned}
$$

jika ditulis dalam bentuk matriks, seperti di bawah ini

$$\begin{pmatrix} 8 & 59 & 627 \\ 59 & 627 & 7451 \\ 627 & 7451 & 94131 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 479 \\ 5307 \end{pmatrix}$$

dengan menggunakan aturan Cramer, perlu dihitung

$$det(A) = \begin{vmatrix} 8 & 59 & 627 \\ 59 & 627 & 7451 \\ 627 & 7451 & 94131 \end{vmatrix} = 5129680,$$

$$det(A_0) = \begin{vmatrix} 58 & 59 & 627 \\ 479 & 627 & 7451 \\ 5307 & 7451 & 94131 \end{vmatrix} = 27373040,$$

$$det(A_1) = \begin{vmatrix} 8 & 58 & 627 \\ 59 & 479 & 7451 \\ 627 & 5307 & 94131 \end{vmatrix} = 1230180,$$

dan

$$det(A_2) = \begin{vmatrix} 8 & 59 & 58 \\ 59 & 627 & 479 \\ 627 & 7451 & 5307 \end{vmatrix} = 9500,$$

sehingga nilai

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{det(A_0)}{det(A)} = \frac{27373040}{5129680} = 5.336208 \\ a_1 &= \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{1230180}{5129680} = 0.239816 \\ a_2 &= \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{9500}{5129680} = 0.001852 \end{aligned}$$

sehingga persamaan polinomial regresi yang diminta adalah

$$\tilde{y} = 5.336208 + 0.239816x + 0.001852x^2$$

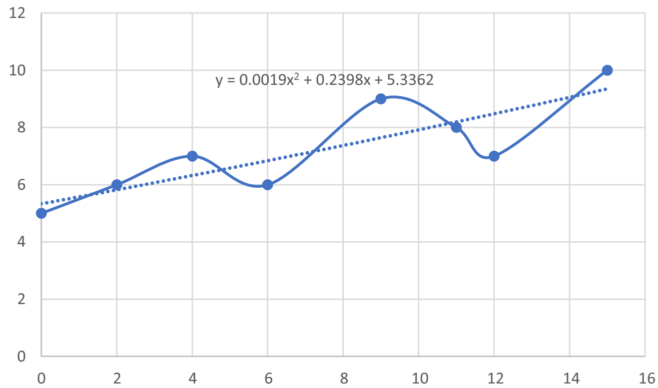
dan jika dibandingkan dengan data yang ada, diperoleh galat kuadrat seperti tabel di atas atau dapat di lihat sketsa grafiknya pada Gambar 4.12, dengan total galat kuadrat sebesar 5.799613.

◀

Contoh berikut akan memudahkan pemahaman metode kuadrat terkecil dengan polinomial regresi order 2.

Contoh 4.5.4 Diberikan data sebagai berikut.

x	4.0	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
y	2.56	13.18	30.11	42.05	67.53	95.14	124.87	156.73	199.50	226.72



Gambar 4.12: Sketsa grafik dari data dan persamaan regresi linear

Carilah persamaan regresi linear dan galat kuadrat dari data tersebut?

Penyelesaian

Untuk mendapat polinomial regresi order 2, maka perlu diketahui bahwa jumlah data sebanyak $m = 8$ kemudian hitung $\sum y_i$, $\sum x_i$, $\sum y_i x_i$, $\sum x_i^2$, $\sum x_i^3$, $\sum x_i^4$, $\sum y_i x_i$, dan $\sum y_i x_i^2$, dalam tabel berikut

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$	$\tilde{y}_i$	er^2
1	4	2.56	16	64	256	10.24	40.96	2.553	5.12E-5
2	4.2	13.18	17.64	74.088	311.170	55.356	232.495	13.18	3.99E-6
3	4.5	30.11	20.25	91.125	410.063	135.495	609.73	30.11	2.32E-6
4	4.7	42.05	22.09	103.823	487.968	197.635	928.89	42.057	5.30E-5
5	5.1	67.53	26.01	132.651	676.520	344.403	1756.46	67.543	1.76E-4
6	5.5	95.14	30.25	166.375	915.063	523.27	2877.99	95.147	4.99E-5
7	5.9	124.87	34.81	205.379	1211.736	736.733	4346.73	124.87	1.70E-6
8	6.3	156.73	39.69	250.047	1575.296	987.399	6220.61	156.71	4.77E-4
9	6.8	199.50	46.24	314.432	2138.138	1356.6	9224.88	199.49	2.05E-4
10	7.1	226.72	50.41	357.911	2541.168	1609.71	11428.96	226.74	4.23E-4
$\sum$	54.1	958.39	303.39	1759.83	10523.12	5956.84	37667.68		8.15E-4

dari tabel di atas ini diperolehsistem persamaan linear berikut

$$\begin{aligned}
10\ a_0 + \quad 54.1\ a_1 + \quad 303.39\ a_2 &= 958.39 \\
54.1\ a_0 + \quad 303.39\ a_1 + \ 1759.83\ a_3 &= 5956.84 \\
303.39\ a_0 + 1759.83\ a_1 + 10523.12\ a_2 &= 37667.68
\end{aligned}$$

jika ditulis dalam bentuk matriks, seperti di bawah ini

$$\begin{pmatrix} 10 & 54.1 & 303.39 \\ 54.1 & 303.39 & 1759.83 \\ 303.39 & 1759.83 & 10523.12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 958.39 \\ 5956.84 \\ 37667.68 \end{pmatrix}$$

dengan menggunakan aturan Cramer, perlu dihitung

$$det(A) = \begin{vmatrix} 10 & 54.1 & 303.39 \\ 54.1 & 303.39 & 1759.83 \\ 303.39 & 1759.83 & 10523.12 \end{vmatrix} = 804.413072,$$

$$det(A_0) = \begin{vmatrix} 958.39 & 54.1 & 303.39 \\ 5956.84 & 303.39 & 1759.83 \\ 37667.68 & 1759.83 & 10523.12 \end{vmatrix} = -79447.406,$$

$$det(A_1) = \begin{vmatrix} 10 & 958.39 & 303.39 \\ 54.1 & 5956.84 & 1759.83 \\ 303.39 & 37667.68 & 10523.12 \end{vmatrix} = -919.86515,$$

dan

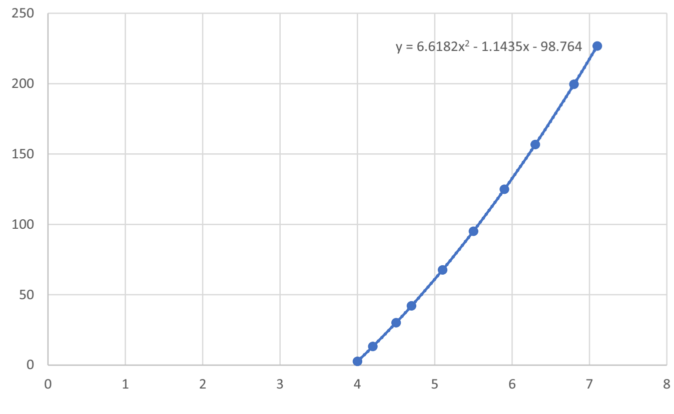
$$det(A_2) = \begin{vmatrix} 10 & 54.1 & 958.39 \\ 54.1 & 303.39 & 5956.84 \\ 303.39 & 1759.83 & 37667.68 \end{vmatrix} = 5323.775538,$$

sehingga nilai

$$a_0 = \frac{det(A_0)}{det(A)} = \frac{-79447.406}{804.413072} = -98.764$$

$$a_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)} = \frac{-919.86515}{804.413072} = -1.1435$$

$$a_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)} = \frac{5323.775538}{804.413072} = 6.61821$$



Gambar 4.13: Sketsa grafik dari data dan polinomial regresi

sehingga persamaan polinomial regresi yang diminta adalah

$$\tilde{y} = -98.764 - 1.1435x + 6.61821x^2$$

dan jika dibandingkan dengan data yang ada, diperoleh galat kuadrat seperti tabel di atas atau dapat di lihat sketsa grafiknya pada Gambar 4.13, dengan total galat kuadrat sebesar $8.15E-4$.

◀

SOAL-SOAL LATIHAN 4.5

1. Regresi polinomial derajat tiga, adalah

$$P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

carilah rumusan untuk a_0, a_1, a_2 dan a_3?

2. Diketahui data dari Tahanan (R) dan Suhu (T) pada suatu alat, yaitu

T	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
R	28	34	36	37	43	43	45	49	50	57

Dapatkan persamaan

(a) regresi polinomial order dua?

(b) gunakan hasil Soal no 1 untuk mendapatkan regresi polinomial order tiga?

(c) bandingkan galat kuadrat terkecilnya?

3. Diketahui data eksperimen pada suatu alat, yaitu

x	6	7	11	15	17	21	23	27	31	37
y	29	23	27	17	21	15	11	7	11	3

Selesaikan sama seperti Soal 2?

4. Diketahui data sebagai berikut

t	2	4	6	8	10	12	14	17	20
y	3	2	5	2	8	7	6	9	12

Selesaikan sama seperti Soal 2?

5. Selesaikan sama seperti Soal 2? dari data berikut ini

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	1	1.5	2	3	4	5.5	7.75	10	13

6. Daftar berikut adalah nilai pekerjaan rumah dan nilai ujian akhir dari 30 mahasiswa. Temukan regresi polinomial order 2 dan 3 dari data ini, dan gunakan hasilnya untuk menentukan nilai pekerjaan rumah yang diperlukan untuk memprediksi nilai minimal.

PR	Ujian	PR	Ujian	PR	Ujian
302	45	343	83	234	51
325	72	290	74	337	53
285	54	326	76	351	100
339	54	233	57	339	67
334	79	254	45	343	83
322	65	323	83	314	42
331	99	337	99	344	79
279	63	337	70	185	59
316	65	304	62	340	75
347	99	319	66	316	45

7. Diberikan data berikut ini

x	4.0	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
y	102.56	113.18	130.11	142.05	167.53	195.14	224.87	256.73	299.50	326.72

   Tentukan polinomial kuadrat terkecil linear, dan hitung kesalahannya.

8. Sama seperti Soal no 7, dengan data berikut ini

x	0.2	0.3	0.6	0.9	1.1	1.3	1.4	1.6
y	0.05045	0.09843	0.33277	0.72661	1.09721	1.56971	1.84871	2.50151

9. Gunakan hasil dari Soal no 1, dan selesaikan Soal no 7?

10. Gunakan hasil dari Soal no 1, dan selesaikan Soal no 8?

4.5.3 Regresi Non-Linear

Telah dibahas di atas metode kuadart terkecil dengan pendekatan regresi inear dan polinomial regresi, pada bagian ini akan dibahas metode kuadrat terkecil untuk persamaan non linear. Salah satu bentuk regresi non linear adalah

$$y = a_0 e^{a_1 x} \tag{4.62}$$

Jika bentuk persamaan non-linear seperti di Persamaan 4.62, maka akan dicari koefisien yang belum diketahui, yaitu a_0 dan a_1 dengan cara sebagai berikut. Ruas kiri maupun ruas kanan dari Persamaan 4.62 kalikan dengan ln, maka menjadi

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln(a_0 e^{a_1 x}), \qquad \text{atau} \\ &= \ln a_0 + \ln e^{a_1 x}), \qquad \text{atau} \\ &= \ln a_0 + a_1 x \end{aligned}$$

dengan memisalkan $z = \ln y$ dan $b = \ln a_0$ maka persamaan terakhir tersebut menjadi

$$z = b + a_1 x$$

Persamaan ini sama dengan persamaan regresi linear di atas, sehingga penyelesaian regresi non linear dapat diselesaikan. Perhatikan contoh berikut.

Contoh 4.5.5 Diberikan data sebagai berikut.

x	0	2	4	6	9	11	12	15
y	5	6	7	6	9	8	7	10

Carilah persamaan regresi non-linear dan galat kuadrat dari data tersebut?

Penyelesaian

Untuk mendapat persamaan regresi non-linear, maka perlu diketahui bahwa jumlah data sebanyak $n = 8$ kemudian hitung $\sum \ln y_i$, $\sum x_i$, $\sum x_i \ln y_i$, dan $\sum x_i^2$, dalam tabel berikut

i	x_i	y_i	$\ln y_i$	$x_i \ln y_i$	x_i^2	$\tilde{y}_i$	er^2
1	0	5	1.60944	0	0	5.385954	14.26207
2	2	6	1.79176	3.583519	4	5.801731	16.07987
3	4	7	1.94591	7.783641	16	6.249604	18.52178
4	6	6	1.79176	10.75056	36	6.732051	24.40648
5	9	9	2.19723	19.77502	81	7.526443	28.40056
6	11	8	2.07944	22.87386	121	8.107457	36.33697
7	12	7	1.94591	23.35092	144	8.414574	41.84361
8	15	10	2.30259	34.53878	225	9.407506	50.4799
$\sum$	59		15.66403	122.6563	627		230.3312

dengan menggunakan Persamaan 4.57 di dapat matriks berikut

$$\begin{pmatrix} 8 & 59 \\ 59 & 627 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15.66403 \\ 122.6563 \end{pmatrix}$$

dengan menggunakan Rumus 4.58 didapat

$$\begin{aligned} b &= \frac{\begin{vmatrix} 15.66403 & 59 \\ 122.6563 & 627 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 59 \\ 59 & 627 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{15.66403 \times 627 - 59 \times 122.65639}{8 \times 627 - 59^2} \\ &= 1.683794 \end{aligned}$$

karena $b = \ln a_0$, maka

$$a_0 = e^b = e^{1.683794} = 5.385954$$

dan Rumus 4.59 didapat

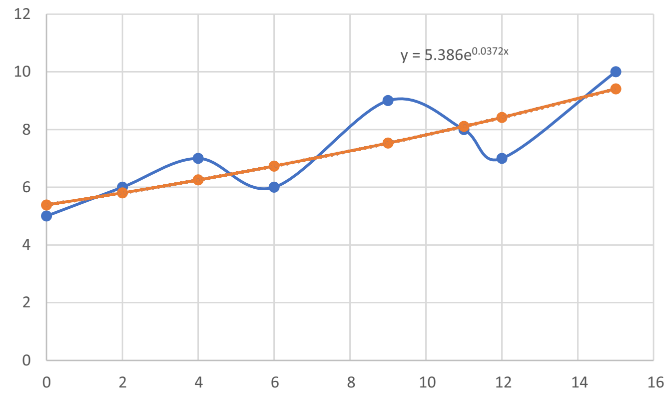
$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 8 & 15.66403 \\ 59 & 122.6563 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 59 \\ 59 & 627 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{8 \times 122.6563 - 15.66403 \times 59}{8 \times 627 - 59^2} \\ &= 0.037181 \end{aligned}$$

sehingga persamaan regresi non linear yang diminta adalah

$$\tilde{y} = 5.385954 e^{0.037181\ x}$$

dan jika dibandingkan dengan data yang ada, diperoleh galat kuadat seperti tabel di atas atau dapat di lihat sketsa grafiknya pada Gambar 4.14, dengan total galat kuadrat sebesar 230.3312.

◀



Gambar 4.14: Sketsa grafik dari data dan persamaan regresi non-linear

Contoh berikut akan memudahkan pemahaman metode kuadrat terkecil.

CONTOH 4.5.6 Diberikan data sebagai berikut.

x	4.0	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
y	2.56	13.18	30.11	42.05	67.53	95.14	124.87	156.73	199.50	226.72

Carilah persamaan regresi linear dan galat kuadrat dari data tersebut?

Penyelesaian

Untuk mendapat persamaan regresi linear, maka perlu diketahui bahwa jumlah data sebanyak $n = 10$ kemudian hitung $\sum y_i$, $\sum x_i$, $\sum y_i x_i$, $(\sum x_i)^2$, dan $\sum x_i^2$, dalam tabel berikut

x_i	y_i	$\ln y_i$	$x_i \ln y_i$	x_i^2	$\tilde{y}_i$	er^2
4	2.56	0.940007	3.760029	16	10.849702	68.71917
4.2	13.18	2.578701	10.83054	17.64	13.650652	0.221513
4.5	30.11	3.404857	15.32186	20.25	19.264455	117.6259
4.7	42.05	3.738859	17.57264	22.09	24.237749	317.2763
5.1	67.53	4.212572	21.48412	26.01	38.367490	850.452
5.5	95.14	4.555349	25.05442	30.25	60.734366	1183.748
5.9	124.87	4.827273	28.48091	34.81	96.140331	825.3939
6.3	156.73	5.054525	31.84350	39.69	152.18671	20.64149
6.8	199.50	5.295814	36.01154	46.24	270.21884	5001.154
7.1	226.72	5.423716	38.50838	50.41	381.34577	23909.14
54.1		40.03167	228.8679	303.39		32294.37

dengan menggunakan Persamaan 4.57 di dapat matriks berikut

$$\begin{pmatrix} 10 & 54.1 \\ 54.1 & 303.39 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40.03167 \\ 228.8679 \end{pmatrix}$$

dengan menggunakan Rumus 4.58 didapat

$$\begin{aligned} b &= \frac{\begin{vmatrix} 40.03167 & 54.1 \\ 228.8679 & 303.39 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 54.1 \\ 54.1 & 303.39 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{40.03167 \times 303.39 - 54.1 \times 228.8679}{10 \times 303.39 - 54.1^2} \\ &= -2.20885 \end{aligned}$$

karena $b = \ln a_0$, maka

$$a_0 = e^b = e^{-2.20885} = 0.10983$$

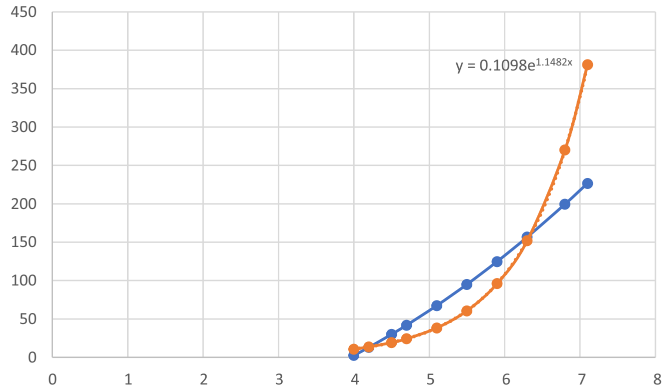
dan Rumus 4.59 didapat

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 10 & 40.03167 \\ 54.1 & 228.8679 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 54.1 \\ 54.1 & 303.39 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{10 \times 228.8679 - 40.03167 \times 54.1}{10 \times 303.39 - 54.1^2} \\ &= 1.148248 \end{aligned}$$

sehingga persamaan regresi linear yang diminta adalah

$$\tilde{y} = 0.10983e^{1.148248\ x}$$

dan jika dibandingkan dengan data yang ada, diperoleh galat kuadat seperti tabel di atas atau dapat di lihat sketsa grafiknya pada Gambar 4.15, dengan total galat kuadrat sebesar 32294.37.



Gambar 4.15: Sketsa grafik dari data dan persamaan regresi non linear

◀

SOAL-SOAL LATIHAN 4.5

1. Diketahui data dari Tahanan (R) dan Suhu (T) pada suatu alat, yaitu

T	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
R	28	34	36	37	43	43	45	49	50	57

Dapatkan persamaan regresi non linear dan tentukan galat kuadrat terkecilnya?

2. Diketahui data eksperimen pada suatu alat, yaitu

x	6	7	11	15	17	21	23	27	31	37
y	29	23	27	17	21	15	11	7	11	3

Dapatkan persamaanregresi non linear dan tentukan pula galat kuadrat terkecilnya?

3. Diketahui data sebagai berikut

t	2	4	6	8	10	12	14	17	20
y	3	2	5	2	8	7	6	9	12

Dapatkan persamaan regresi non linear dan tentukan pula galat kuadrat terkecilnya?

4. Carilah persamaan regresi non linear dari data berikut ini

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	1	1.5	2	3	4	5.5	7.75	10	13

5. Bentuk regresi non linear yang lain, yaitu

$$y(x) = a_0 10^{a_1 x}$$

carilah rumusan untuk a_0, dan a_1, sehingga kesalahan kuadrat terkecilnya minimal?

6. Daftar berikut adalah nilai pekerjaan rumah dan nilai ujian akhir dari 30 mahasiswa. Temukan persamaan regresi non linear dari data ini, dan gunakan persamaan tersebut untuk menentukan nilai pekerjaan rumah yang diperlukan untuk memprediksi nilai minimal.

PR	Ujian	PR	Ujian	PR	Ujian
302	45	343	83	234	51
325	72	290	74	337	53
285	54	326	76	351	100
339	54	233	57	339	67
334	79	254	45	343	83
322	65	323	83	314	42
331	99	337	99	344	79
279	63	337	70	185	59
316	65	304	62	340	75
347	99	319	66	316	45

7. Diberikan data berikut ini

x	4.0	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
y	102.56	113.18	130.11	142.05	167.53	195.14	224.87	256.73	299.50	326.72

   Tentukan persamaan regresi non linear, dan hitung kesalahannya.

8. Sama seperti Soal no 7, dengan data berikut ini

x	0.2	0.3	0.6	0.9	1.1	1.3	1.4	1.6
y	0.05045	0.09843	0.33277	0.72661	1.09721	1.56971	1.84871	2.50151

9. Gunakan hasil dari Soal no 5, dan selesaikan Soal no 7?

10. Gunakan hasil dari Soal no 5, dan selesaikan Soal no 8?

Bab 5

Integrasi Numerik

Suatu lembaran aluminium yang dipanaskan berbentuk gelombang sinus. Misalkan lembaran aluminium tersebut mempunyai panjang $48cm$ dan tinggi gelombang adalah $1cm$. Setiap gelombang mempunyai periode sebesar $2\pi cm$. Permasalahan yang akan dihadapi adalah menemukan panjang dari lembaran aluminium yang telah dipanaskan. Jika didefinisikan kurva dari aluminium tersebut adalah $f(x) = sin\ x$, dimulai dari titik awal adalah $x = 0$ sampai dengan titik akhir adalah $x = 48cm$. Berdasarkan pada mata kuliah kalkulus yang sudah dipelajari sebelumnya, panjang aluminium tersebut merupakan panjang kurva, yaitu

$$S = \int_0^{48} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^{48} \sqrt{1 + (cos\ x)^2} dx$$

Suatu integrasi terkadang sulit atau bahkan tidak bisa diselesaikan secara analitik, sehingga untuk menyelesaikan integrasi tersebut dapat dilakukan dengan bantuan secara numerik. Untuk menyelesaikan integrasi tersebut secara numerik, pada Bab ini akan diperkenalkan penyelesaian integrasi dengan numerik dengan aturan Trapeziodal, aturan Simpson, Integrasi Romberg, dan kuadratur Gauss.

5.1 Aturan Trapeziodal dan Simpson

5.1.1 Aturan Trapeziodal

Telah dijelaskan di atas, bahwa tidak semua integrasi dapat diselesaikan secara analitik, untuk mengatasi masalah tersebut diperlukan bantuan numerik untuk menyelesaikannya. Untuk mendapatkan atau menghitung integrasi dengan aturan Trapeziodal dengan cara mencari nilai pendekatan atau nilai aproksimasi dari

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

dengan memisalkan $x_0 = a, x_1 = b, h = b - a$. Pada Bab sebelumnya sudah dipelajari tentang interpolasi polinomial Lagrange, yaitu

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

jika yang digunakan adalah polinomial linier Lagrange, yaitu

$$P_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

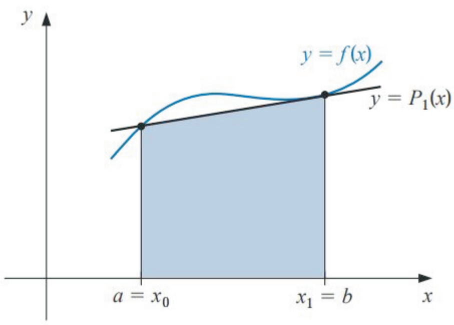
maka

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \right) dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x - x_0)(x - x_1)\,dx\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x - x_0)(x - x_1)\,dx &= f''(\xi(x)) \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)\,dx \\ &= -\frac{h^3}{6} f''(\xi)\end{aligned}$$

sedangkan



Gambar 5.1: Aturan Trapeziodal

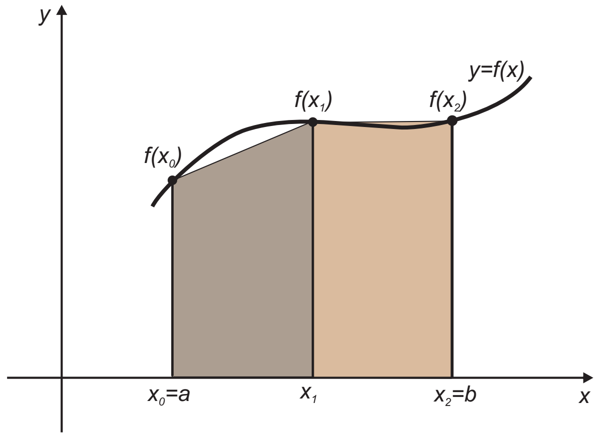
$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) \right. &+ \left. \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \right) dx \\ &= \left[\frac{(x - x_1)^2}{2(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2(x_1 - x_0)} f(x_1) \right]_{x_0}^{x_1} \\ &= \frac{x_1 - x_0}{2} (f(x_0) + f(x_1))\end{aligned}$$

Dengan memisalkan $h = x_1 - x_0$, diperoleh aturan Trapezoidal sebagai berikut.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) - \frac{h^3}{12} f''(\epsilon) \tag{5.1}$$

Pada aturan Trapeziodal tersebut, f merupakan fungsi yang bernilai positif. Sehingga $\int_a^b f(x)\,dx$ dapat didekati sebagai luasan trapesium, seperti terlihat pada Gambar 5.1.

Pada aturan Trapeziodal, suku kesalahan dipengaruhi oleh f'', sehingga hasil eksak diperoleh ketika turunan kedua dari fungi adalah 0, yaitu polinomial derajat satu atau yang lebih rendah.



Gambar 5.2: Dua Trapeziodal

Jika interval dari batas integrasi dibagi menjadi dua bagian seperti pada Gambar 5.2, sehingga ada dua trapezoidal, misal titik-titiknya adalah $x_0 = a$, x_1, dan $x_2 = b$ dan nilai fungsinya adalah $f(x_0)$, $f(x_1)$, dan $f(x_2)$, maka kalau diambil dua titik saja, yaitu $x_0 = a$, dan x_1 dengan nilai fungsinya adalah $f(x_0)$, dan $f(x_1)$ dengan $h = (b - a)/2$ maka

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) - \frac{h^3}{12} f''(\epsilon)$$

dengan cara yang sama untuk x_1, dan $x_2 = b$ dengan nilai fungsinya adalah $f(x_1)$, dan $f(x_2)$, maka

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{2}(f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^3}{12} f''(\epsilon)$$

jika keduanya dijumlahkan, maka dengan tiga titik didapat rumus

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)) - \frac{h^3}{12} f''(\epsilon) \tag{5.2}$$

dan jika interval dibagi sebanyak $n + 1$ titik, yaitu x_0, x_1, x_2, $\cdots$, x_n atau sebanyak n trapezoidal, maka rumus trapezoidalnya adalah

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}(f(x_1) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})) + f(x_n)) \tag{5.3}$$

Contoh 5.1.1 Dengan menggunakan aturan Trapezium, aproksimasi $\int_0^2 f(x)\,dx$ dengan $f(x) = x^2$ dan banyaknya trapezoidal adalah 1,2, 4, 5 dan 10.

Penyelesaian

Untuk satu trapezoidal, maka gunakan Rumus 5.1, dengan $h = (2-0)/1 = 2$ sehingga

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2\,dx &\approx \frac{2}{2}(f(0)+f(2))\\ &\approx 0^2+2^2\\ &\approx 4\end{aligned}$$

dan untuk dua trapezoidal, maka gunakan Rumus 5.2, dengan $h = (2-0)/2 = 1$ sehingga

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2\,dx &\approx \frac{1}{2}(f(0)+2f(1)+f(2))\\ &\approx \frac{1}{2}(0^2+2(1^2)+2^2)\\ &\approx 3\end{aligned}$$

sedangkan untuk empat trapezoidal, maka $h = (2-0)/4 = \frac{1}{2} = 0.5$ sehingga

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2\,dx &\approx \frac{\frac{1}{2}}{2}(f(0)+2(f(0.5)+f(1)+f(1.5))+f(2))\\ &\approx \frac{1}{4}\left(0^2+2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)+2^2\right)\\ &\approx \frac{11}{4}\\ &\approx 2.75\end{aligned}$$

untuk lima trapezoidal, maka $h = (2-0)/5 = \frac{2}{5} = 0.4$ sehingga

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2\,dx &\approx \frac{\frac{2}{5}}{2}(f(0)+2(f(0.4)+f(0.8)+f(1.2)+f(1.6))+f(2)\\ &\approx \frac{1}{5}\left(0^2+2\left(\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2\right)+2^2\right)\\ &\approx \frac{340}{125}\\ &\approx 2.72\end{aligned}$$

dan untuk 10 trapezoidal, maka $h = (2-0)/10 = \frac{1}{5} = 0.2$ sehingga

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2\,dx &\approx \frac{\frac{1}{5}}{2}(f(0)+2(f(0.2)+f(0.4)+\cdots+f(1.8))+f(2)\\ &\approx \frac{1}{10}\left(0^2+2\left(\left(\frac{2}{10}\right)^2+\left(\frac{4}{10}\right)^2+\cdots+\left(\frac{18}{10}\right)^2\right)+2^2\right)\\ &\approx \frac{134}{50}\\ &\approx 2.68\end{aligned}$$

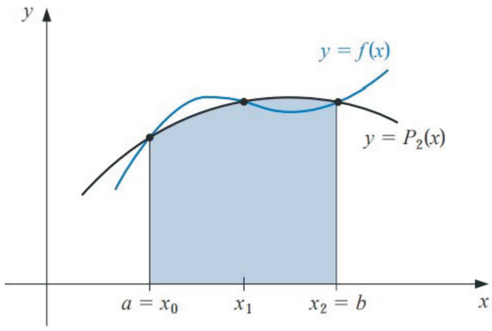
untuk mengetahui keakuratan perhitungan dbandingkan dengan nilai eksak yaitu 2.66667 perhatikan tabel berikut

n	nilai	kesalahan
1	4	50.00%
2	3	12.50%
4	2.75	3.13%
5	2.72	2.00%
10	2.68	0.50%

terlihat bahwa bahwa semakin banyak pias maka kesalahan semakin kecil.

◀

5.1.2 Aturan Simpson



Gambar 5.3: Aturan Simpson

Aturan Simpson dihasilkan dari integrasi pada $[a, b]$ pada polinomial Lagrange order kedua dengan lebar selang yang sama, yaitu $x_0 = a, x_2 = b$, dan $x_1 = a + h$, dimana $h = (b - a)/2$, seperti terlihat pada Gambar 5.3.

Aturan Simpson juga dapat diturunkan dengan mengekspansikan f terhadap polinomial deret Taylor order ketiga di sekitar x_1. Sehingga untuk setiap $x \in [x_0, x_2]$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2}(x - x_1)^2 \\ &\quad + \frac{f'''(x_1)}{6}(x - x_1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24}(x - x_1)^4 \end{aligned}$$

dan diintegralkan

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_2} \Bigg(f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2}(x - x_1)^2 \\ &\quad + \frac{f'''(x_1)}{6}(x - x_1)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24}(x - x_1)^4 \Bigg)\,dx \end{aligned}$$

diperoleh:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx &= \Bigg[f(x_1)(x - x_1) + \frac{f'(x_1)}{2}(x - x_1)^2 + \frac{f''(x_1)}{6}(x - x_1)^3 \\ &\quad + \frac{f'''(x_1)}{24}(x - x_1)^4) \Bigg]_{x_0}^{x_2} + \frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x - x_1)^4\,dx \end{aligned}$$

untuk menyederhanakan persamaan tersebut, hitung

$$\begin{aligned}\frac{1}{24}\int_{x_0}^{x_2} f^{(4)}(\xi(x))(x-x_1)^4\,dx &= \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{24}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)^4\,dx \\ &= \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{120}(x-x_1)^5\Big]_{x_0}^{x_2} \\ &= \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{60}h^5 \qquad (5.4)\end{aligned}$$

ingat, bahwa $h = x_{i+1} - x_i$, kemudian

$$\begin{aligned} f(x_1)(x-x_1)]_{x_0}^{x_2} &= f(x_1)\left((x_2-x_1)-(x_0-x_1)\right) \\ &= f(x_1)2h, \qquad (5.5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x_1)(x-x_1)]_{x_0}^{x_2} &= \frac{f'(x_1)}{2}\left((x_2-x_1)^2-(x_0-x_1)^2\right) \\ &= 0, \qquad (5.6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{f''(x_1)}{2}(x-x_1)^2\Big]_{x_0}^{x_2} &= \frac{f''(x_1)}{6}\left((x_2-x_1)^3-(x_0-x_1)^3\right) \\ &= \frac{f''(x_1)}{3}h^3, \qquad (5.7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{f'''(x_1)}{24}(x-x_1)^3\Big]_{x_0}^{x_2} &= \frac{f'''(x_1)}{120}\left((x_2-x_1)^4-(x_0-x_1)^4\right) \\ &= 0, \qquad (5.8)\end{aligned}$$

maka

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}f''(x_1) + \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{60}h^5 \qquad (5.9)$$

dan telah diketahui di Bab sebelumnya bahwa

$$f''(x_1) = \frac{f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi_2)$$

sehingga Persamaan 5.9 manjadi

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx &= \frac{h}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right) \\ &\quad -\frac{h^5}{12}\left(\frac{1}{3}f^{(4)}(\xi_2) - \frac{1}{5}f^{(4)}(\xi_1)\right)\end{aligned}$$

atau

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right) - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi) \qquad (5.10)$$

dan Persamaan 5.10 tersebut adalah Aturan Simpson

Pada aturan Simpson, suku error dipengaruhi oleh $f^{(4)}$, yaitu turunan keempat dari f, sehingga hasil eksak diperoleh ketika turunan keempat dari fungsi adalah 0, yaitu polinomial derajat tiga atau yang lebih rendah.

Aturan Simpson di Persamaan 5.10 digunakan untuk tiga titik yang diketahui, bagaimana jika diketahui titik yang lebih banyak, misal diketahui titik-titik x_0, x_1, x_2, x_3, dan x_4 dengan nilai fungsinya adalah $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, dan $f(x_4)$, maka untuk menghitungnya digunakan tiga titik pertama yaitu x_0, x_1, dan x_2 dengan $f(x_0)$, $f(x_1)$, dan $f(x_2)$, maka

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$$

dan tiga titik berikutnya adalah x_2, x_3, dan x_4 dengan $f(x_2)$, $f(x_3)$, dan $f(x_4)$, diperoleh

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right)$$

sehingga untuk lima titik yang diketahui aturan Simpson menjadi

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 2(f(x_2)) + 4(f(x_1) + f(x_3)) + f(x_4)\right)$$

Secara umum rumus untuk aturan Simpson dengan data sebanyak $n+1$ yaitu x_0, x_1, x_2, $\cdots$, x_n, dengan $h = x_{i+1} - x_i$ dan nilai fungsinya adalah $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\cdots$, $f(x_n)$ adalah

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\left(f(x_1) + f(x_3) + \cdots\right)\right.\\ &\quad \left. + 4\left(f(x_2) + f(x_4) + \cdots\right) + f(x_n)\right]\end{aligned} \tag{5.11}$$

untuk memudahkan mengingatnya rumus ini, rumus ditulis

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(awal) + 4\ f(ganjil) + 2\ f(genap) + f(akhir)\right]$$

Contoh 5.1.2 Dengan menggunakan aturan Simpson, aproksimasi $\int_0^2 f(x)\ dx$ dengan $f(x) = x^2$ dan banyaknya data adalah $n = 3, 5, 11$.

Penyelesaian
Untuk data sebanyak $n = 3$ maka $h = (2-0)/2 = 1$ sehingga

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2\,dx &\approx \frac{1}{3}[f(0) + 4f(1) + f(2)]\\ &\approx \frac{1}{3}[0^2 + 4\ (1^2) + 2^2\\ &\approx \frac{8}{3}\end{aligned}$$

Untuk data sebanyak $n = 5$ maka $h = (2-0)/4 = \frac{1}{2}$ sehingga

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x^2\,dx &\approx \frac{\frac{1}{2}}{3}\left[f(0) + 4\left(f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)\right) + 2f(1) + f(2)\right] \\
&\approx \frac{1}{6}\left[0^2 + 4\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + 2\,(1^2) + 2^2\right] \\
&\approx \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

dan untuk data sebanyak $n = 11$ maka $h = (2-0)/10 = 0.2 = \frac{1}{5}$ sehingga

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x^2\,dx &\approx \frac{\frac{1}{5}}{3}\left[f(0) + 4\left(f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{5}{5}\right) + f\left(\frac{7}{5}\right) + f\left(\frac{9}{5}\right)\right)\right) \\
&\quad + 2\left(f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) + f\left(\frac{6}{5}\right) + f\left(\frac{8}{5}\right)\right) + f(2)\Bigg] \\
&\approx \frac{1}{15}\left[0 + 4\left(\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2\right)\right. \\
&\quad \left. + 2\left(\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2\right) + 2^2\right] \\
&\approx \frac{40}{15} \approx \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

◀

Untuk lebih memahami materi yang telah diuraikan di atas, perhatikan contoh berikut ini.

CONTOH 5.1.3 Aproksimasi nilai dari $\int_0^2 f(x)\,dx$ untuk $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ dengan menggunakan metode Trapeziodal dan Simpson, kemudian bandingkan hasilnya dengan nilai eksak. Selesaikan dengan menggunakan data sebanyak 3, 5 dan 7!

Penyelesaian

1. Karena menggunakan tiga data, maka $h = (2-0)/2 = 1$ dengan $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, dan nilai fungsi $f(0) = 1$, $f(1) = \sqrt{2}$, dan $f(2) = \sqrt{5}$. Dengan menggunakan aturan Trapezoidal, nilai numeriknya adalah

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx &\approx \frac{1}{2}(f(0) + 2f(1) + f(2)) \\
&\approx \frac{1}{2}\left[1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5}\right] \\
&\approx 3.0322
\end{aligned}$$

dan dengan aturan Simpson, nilai numeriknya adalah

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx &\approx \frac{1}{3}[f(0)+4f(1)+f(2)] \\
&\approx \frac{1}{3}\left[1+4\,(\sqrt{2})+\sqrt{5}\right] \\
&\approx 2.9643
\end{aligned}$$

2. Karena menggunakan lima data, maka $h = (2-0)/4 = 0.5$ dengan $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1.5$, $x_4 = 2$ dan nilai fungsi $f(0) = 1$, $f(0.5) = \sqrt{1.25}$, $f(1) = \sqrt{2}$, $f(1.5) = \sqrt{3.25}$, dan $f(2) = \sqrt{5}$. Dengan menggunakan aturan Trapezoidal, nilai numeriknya adalah

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx &\approx \frac{0.5}{2}[f(0)+2(f(0.5)+f(1)+f(1.5))+f(2)] \\
&\approx \frac{1}{2}\left[1+2(\sqrt{1.25}+\sqrt{2}+\sqrt{3.25})+\sqrt{5}\right] \\
&\approx 2.976529
\end{aligned}$$

dan dengan aturan Simpson, nilai numeriknya adalah

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx &\approx \frac{0.5}{3}[f(0)+4(f(0.5)+f(1.5))+2f(1)+f(2)] \\
&\approx \frac{1}{3}\left[1+4(\sqrt{1.25}+\sqrt{3.25})+2\sqrt{2}+\sqrt{5}\right] \\
&\approx 2.957656
\end{aligned}$$

3. Karena menggunakan tujuh data, maka $h = (2-0)/6 = \frac{1}{3}$ dengan $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = 1$, $x_4 = \frac{4}{3}$, $x_5 = \frac{5}{3}$, $x_4 = 2$ dan nilai fungsi $f(0) = 1$, $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}\sqrt{10}$, $f(\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}\sqrt{13}$, $f(1) = \sqrt{2}$, $f(\frac{4}{3}) = \frac{5}{3}$, $f(\frac{5}{3}) = \frac{1}{3}\sqrt{34}$, dan $f(2) = \sqrt{5}$. Dengan menggunakan aturan Trapezoidal, nilai numeriknya adalah

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx &\approx \frac{\frac{1}{3}}{2}\left[f(0)+2\left(f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)+f(1)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. +\, f\left(\frac{4}{3}\right)+f\left(\frac{5}{3}\right)\right)+f(2)\right] \\
&\approx \frac{1}{6}\left[1+2\left(\frac{1}{3}\sqrt{10}+\frac{1}{3}\sqrt{13}+\sqrt{2}+\frac{5}{3}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. +\frac{1}{3}\sqrt{34}\right)+\sqrt{5}\right] \\
&\approx 2.966196
\end{aligned}$$

dan dengan aturan Simpson, nilai numeriknya adalah

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx &\approx \frac{\frac{1}{3}}{3}\left[f(0)+4\left(f\left(\frac{1}{3}\right)+f(1)+f\left(\frac{5}{3}\right)\right)\right.\\
&\qquad \left. +\,2\left(f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{4}{3}\right)\right)+f(2)\right]\\
&\approx \frac{1}{9}\left[1+4\left(\frac{1}{3}\sqrt{10}+\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt{34}\right)\right.\\
&\qquad \left. 2\left(\frac{1}{3}\sqrt{13}+\frac{5}{3}\right)+\sqrt{5}\right]\\
&\approx 2.957881
\end{aligned}$$

Nilai eksak dapat diperoleh dengan cara menyelesaikan $\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx$ secara analitik. Yaitu :

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx = 2.957886$$

Sehingga diperoleh nilai error aproksimasi dengan nilai eksaknya sebagai berikut.

Banyak Data	Trapezoidal	Simpson
3	0.0744	0.0064
5	0.018643	0.000007
7	0.008284	0.000007

Sehingga dapat disimpulkan pada soal tersebut lebih tepat untuk diselesaikan dengan aturan Simpson karena nilai error yang lebih kecil dibandingkan dengan aturan Trapezium.

◀

Pada Sub-Bab ini, dijelaskan mengenai metode Trapezium dan metode Simpson untuk menyelesaikan integrasi secara numerik.

1. Aturan Trapezium

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1)) - \frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

Pada aturan Trapezium tersebut, f merupakan fungsi yang bernilai positif. Sehingga $\int_a^b f(x)\,dx$ dapat didekati sebagai luasan trapesium. Suku error dipengaruhi oleh f'', sehingga hasil eksak diperoleh ketika turunan kedua dari fungsi adalah 0, yaitu polinomial derajat satu atau yang lebih rendah.

2. Aturan Simpson

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)) - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

Pada aturan Simpson, suku error dipengaruhi oleh $f^{(4)}$, yaitu turunan keempat dari f, sehingga hasil eksak diperoleh ketika turunan keempat dari fungsi adalah 0, yaitu polinomial derajat tiga atau yang lebih rendah.

SOAL-SOAL LATIHAN 5.1

Kerjakan soal-soal berikut ini untuk mengukur tingkat penguasaan Anda atas bahasan yang telah dipelajari.

1. Didefinisikan fungsi $f = x \sin x$. Tentukan hasil integrasi fungsi f dari $a = 0$ hingga $b = \pi/4$ dengan menggunakan metode Trapezium dan Simpson, hitung pula errornya.

2. Didefinisikan fungsi $g = \frac{1}{x \, ln \, x}$. Tentukan hasil integrasi fungsi g dari $a = e$ hingga $b = e + 1$ dengan menggunakan metode Trapezium dan Simpson dan hitung pula errornya.

3. Didefinisikan fungsi $h = \frac{2}{x^2+4}$. Tentukan hasil integrasi fungsi h dari $a = 0$ hingga $b = 0.35$ dengan menggunakan metode Trapezium dan Simpson dan hitung pula errornya.

5.2 Integrasi Romberg dan Kuadratur Gauss

5.2.1 Integrasi Romberg

Integrasi Romberg mengaplikasikan ekstrapolasi Richardson dari aturan komposit Trapeziodal untuk menemukan pendekatan yang lebih baik dengan waktu komputasi yang lebih cepat.

Aturan Trapeziodal dengan kesalahan pemotongan dengan order $O(h^2)$, untuk

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \text{dan} \quad x_j = a + jh$$

didefinisikan sebagai berikut.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(b)\right) - \frac{(b-a)f''(\mu)}{12}h^2$$

dimana $\mu \in (a, b)$.

Untuk menghitung integrasi dengan metode Romberg yaitu mengaproksimasi integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

digunakan hasil dari aturan Trapeziodal dengan $n = 1, 2, 4, 8, 16, \cdots$ dan menyatakan hasil aproksimasinya sebagai

$$R_{1,1}, R_{2,1}, R_{3,1}, \cdots$$

secara berturut-turut. Selanjutnya diaplikasikan ekstrapolasi Richardson, sehingga diperoleh aproksimasi $O(h^4)$ yaitu

$$R_{2,2}, R_{3,2}, R_{4,2}, \cdots$$

dengan

$$R_{k,2} = R_{k,1} + \frac{1}{3}(R_{k,1} - R_{k-1,1})$$

dengan $k = 2, 3, 4, \cdots$. Sedangkan untuk aproksimasi $O(h^6)$ yaitu

$$R_{k,3} = R_{k,2} + \frac{1}{15}(R_{k,2} - R_{k-1,2})$$

dengan $k = 3, 4, 5, \cdots$.

Secara umum, setelah diperoleh aproksimasi $R_{k,j-1}$, dengan aproksimasi $O(h^{2j})$ adalah

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{1}{4^{j-1} - 1}(R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1})$$

dengan $k = j, j+1, j+2, \cdots$.

Hasil ekstrapolasi dapat ditunjukkan dalam tabel berikut.

k	$O(h_k^2)$	$O(h_k^4)$	$O(h_k^6)$	$O(h_k^8)$		$O(h_k^{2n})$
1	$R_{1,1}$					
2	$R_{2,1}$	$R_{2,2}$				
3	$R_{3,1}$	$R_{3,2}$	$R_{3,3}$			
4	$R_{4,1}$	$R_{4,2}$	$R_{4,3}$	$R_{4,4}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
n	$R_{n,1}$	$R_{n,2}$	$R_{n,3}$	$R_{n,4}$	$\cdots$	$R_{n,n}$

Contoh 5.2.1 Gunakan aturan Trapeziodal untuk mengaproksimasi

$$\int_0^{\pi} sin\, x\, dx$$

dengan $n = 1, 2, 4, 8$, dan 16 pias.

Penyelesaian

Dengan aturan Trapeziodal, dengan beragam nilai n yang diberikan, dapat diperoleh pendekatan $O(h^2)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
R_{1,1} &= \frac{\pi}{2}(sin\,0 + sin\,\pi) \\
&= 0 \\
R_{2,1} &= \frac{\pi}{4}(sin\,0 + 2sin\,\frac{\pi}{2} + sin\,\pi) \\
&= 1.57079633 \\
R_{3,1} &= \frac{\pi}{8}(sin\,0 + 2(sin\,\frac{\pi}{4} + sin\,\frac{\pi}{2} + sin\,\frac{3\pi}{4}) + sin\,\pi) \\
&= 1.89611890 \\
R_{4,1} &= \frac{\pi}{16}(sin\,0 + 2(sin\,\frac{\pi}{8} + sin\,\frac{\pi}{4} + \cdots + sin\,\frac{3\pi}{4} + sin\,\frac{7\pi}{8}) + sin\,\pi) \\
&= 1.97423160 \\
R_{5,1} &= \frac{\pi}{16}(sin\,0 + 2(sin\,\frac{\pi}{16} + sin\,\frac{\pi}{8} + \cdots + sin\,\frac{7\pi}{8} + sin\,\frac{15\pi}{16}) + sin\,\pi) \\
&= 1.99357034
\end{aligned}$$

Untuk mendapatkan pendekatan $O(h^4)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
R_{2,2} &= R_{2,1} + \frac{1}{3}(R_{2,1} - R_{1,1}) \\
&= 2.09439511 \\
R_{3,2} &= R_{3,1} + \frac{1}{3}(R_{3,1} - R_{2,1}) \\
&= 2.00455976 \\
R_{4,2} &= R_{4,1} + \frac{1}{3}(R_{4,1} - R_{3,1}) \\
&= 2.00026917 \\
R_{5,2} &= R_{5,1} + \frac{1}{3}(R_{5,1} - R_{4,1}) \\
&= 2.00001659
\end{aligned}$$

dan pendekatan $O(h^6)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
R_{3,3} &= R_{3,2} + \frac{1}{15}(R_{3,2} - R_{2,2}) \\
&= 1.99857073 \\
R_{4,3} &= R_{4,2} + \frac{1}{15}(R_{4,2} - R_{3,2}) \\
&= 1.99998313 \\
R_{5,3} &= R_{5,2} + \frac{1}{15}(R_{5,2} - R_{4,2}) \\
&= 1.99999975
\end{aligned}$$

sedangkan untuk pendekatan $O(h^8)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
R_{4,4} &= R_{4,3} + \frac{1}{63}(R_{4,3} - R_{3,3}) \\
&= 2.00000555 \\
R_{5,4} &= R_{5,3} + \frac{1}{63}(R_{5,3} - R_{4,3}) \\
&= 2.00000001
\end{aligned}$$

Sehingga pendekatan akhir $O(h^{10})$ sebagai berikut.

$$R_{5,5} = R_{5,4} + \frac{1}{255}(R_{5,4} - R_{4,4}) = 1.99999999$$

◀

Untuk lebih jelasnya, perhatikan Algoritma metode Romberg sebagai berikut,

Algoritma Metode Romberg
Untuk mengaproksimasi nilai integral $I = \int_a^b f(x)\,dx$, dengan $n > 0$. INPUT: titik ujung interval a, b; bilangan bulat n.
OUTPUT: Array R. (Menghitung R per baris, hanya 2 baris terakhir yang disimpan di penyimpanan.)

Langkah-1 Tetapkan $h = (b - a)/N$
$t = a$;
$R_{1,1} = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$.

Langkah-2 OUTPUT $(R_{1,1})$

Langkah-3 For $i = 2, 3, \cdots, n$ lakukan langkah 4-8.

Langkah-4 Tetapkan $R_{2,1} = \frac{1}{2}\left(R_{1,1} + h\sum_{k=1}^{2^{i-2}} f(a + (k - 0.5)h)\right)$
(Aproksimasi dengan metode Trapezium)

Langkah-5 Untuk $j = 2, \cdots, i$
tetapkan $R_{2,j} = R_{2,j-1} + \frac{R_{2,j-1} - R_{1,j-1}}{4^{j-1} - 1}$ (Ekstrapolasi)

Langkah-6 OUTPUT ($R_{2,j}$ untuk $j = 1, 2, \cdots, i$).

Langkah-7 Tetapkan $h = h/2$.

Langkah-8 For $j = 1, 2, \cdots, i$, tetapkan $R_{1,j} = R_{2,j}$. (Perbarui baris 1 dari R)

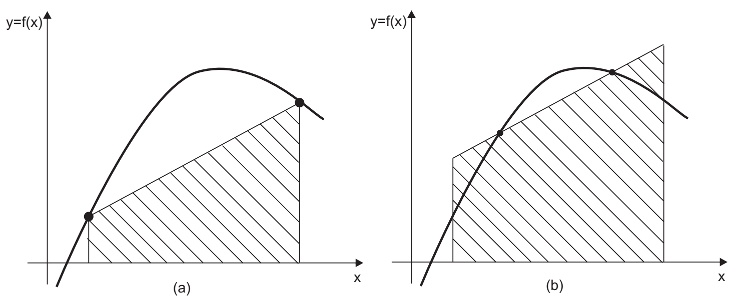
Langkah-9 STOP.

5.2.2 Kuadratur Gauss

Salah satu metode aproksimasi integral secara numerik menggunakan metode Kuadratur Gauss. Pada metode Kuadratur Gauss, nilai integrasi numerik diperoleh dengan menghitung nilai fungsi $f(x)$ pada beberapa titik tertentu.

Perumusan dengan Kuadratur Gauss pada aproksimasi integrasi $f(x)$ dengan interval $[-1,\ 1]$ untuk n titik yang besar $(n \geq 3)$ membutuhkan perhitungan yang rumit. Oleh karena itu perlu cara lain untuk perhitungannya, yaitu dengan menggunakan rumus Interpolasi Hermite. Interpolasi tersebut membentuk polinomial berderajat $2n - 1$ dengan menggunakan n titik, dengan memisalkan n titik tersebut adalah titik-titik pembuat nol pada polinomial Legendre. Dengan menggunakan titik-titik pembuat nol pada polinomial Legendre, dapat diperoleh perumusan yang dinamakan Integrasi Kuadratur Gauss-Legendre.

Metode *Undetermined Coefficient*



Gambar 5.4: Integrasi Kuadratur Gauss dengan Pendekatan Dua Titik

Berdasarkan Gambar 5.4(a), luasan di bawah kurva dapat dihitung dengan integrasi numerik dengan aturan Trapeziodal sebagai berikut:

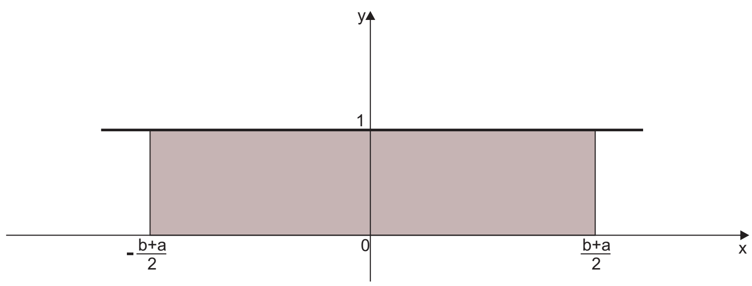
$$I \cong \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = (x_2 - x_1)\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \tag{5.12}$$

Pada aturan Trapeziodal, luasan dihitung dibawah garis lurus yang mana dua titik yang dipilih adalah titik batas kurva. Pada metode integrasi Kuadratur Gauss, berdasarkan Gambar 5.4(b), titik yang dipilih tidak harus berada pada ujung kurva. Dua titik dipilih sedemikian rupa agar kesalahan yang diperoleh dalam perhitungan luasan seminimal mungkin, yaitu agar daerah berarsir yang tidak tercakup dalam kurva dan daerah tidak berarsir yang tercakup dalam kurva seminimal mungkin.

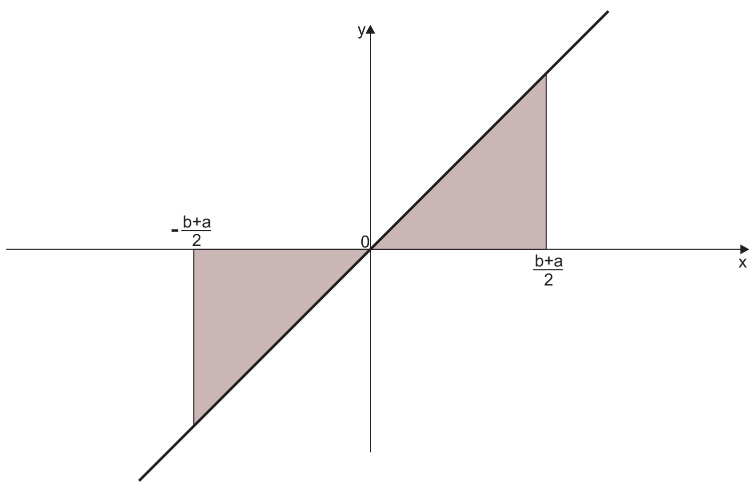
Persamaan 5.12 dapat ditulis ulang sebagai berikut.

$$I \cong \int_{-1}^{1} f(x)dx = c_0 f(a) + c_1 f(b) \tag{5.13}$$

dimana c_0 dan c_1 adalah konstanta.



Gambar 5.5: Kurva y=1



Gambar 5.6: Kurva y=x

Sebagai contoh, didefinisikan $y = 1$ dan $y = x$, sebagaimana pada Gambar 5.5 dan Gambar 5.6. Berdasarkan pada Persamaan 5.13, untuk $y = 1$ luasan dibawah kurva dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 &= \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} 1\, dx \\ &= x\Big|_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \\ &= \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2} \\ &= b - a \end{aligned} \tag{5.14}$$

Untuk $y = x$ luasan dibawah kurva dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} -c_0\frac{b-a}{2} + c_1\frac{b-a}{2} &= \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} x\, dx \\ &= \frac{1}{2}\, x^2\Big|_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Dengan menyelesaikan integrasi pada Persamaan 5.14 dan 5.15, diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$c_0 + c_1 = b - a$$
$$-c_0\frac{b-a}{2} + c_1\frac{b-a}{2} = 0$$

Sehingga diperoleh:

$$c_0 = c_1 = \frac{b-a}{2}$$

Dengan mensubstitusikan nilai c_0 dan c_1 kedalam Persamaan 5.13, diperoleh persamaan sebagai berikut:

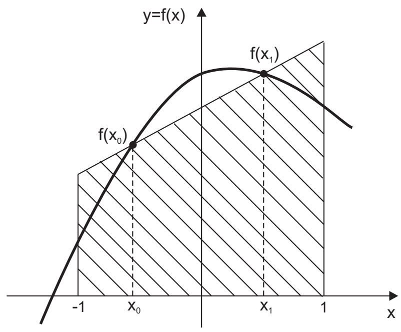
$$I = \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b) \tag{5.16}$$

Penurunan Kuadratur Gauss Legendre dengan Dua Titik

Pada metode Kuadratur Gauss, proses penurunannya hampir sama dengan metode Trapezoidal, yaitu didefinisikan luasan di bawah kurva sebagai berikut:

$$I \cong c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) \tag{5.17}$$

dimana c_i adalah koefisien yang tidak diketahui, untuk $i = 0, 1$. Pada metode trapezoidal, x_0 dan x_1 adalah titik tetap yang berada di ujung kurva. Namun pada metode



Gambar 5.7: Integrasi dengan Kuadratur Gauss jika diketahui titik x_0 dan x_1

Kuadratur Gauss Legendre, kedua titik tersebut tidak diketahui sebagaimana digambarkan pada Gambar 9.6. Dengan mengasumsikan bahwa Persamaan 5.17 dipenuhi untuk konstanta dan fungsi linier, maka nilai dari x_0 dan x_1 dapat ditemukan. Kemudian, untuk menentukan nilai dari $f(x_0)$ dan $f(x_1)$, diasumsikan bahwa kurva yang ada memenuhi integral dari fungsi parabolik ($y = x^2$) dan fungsi kubik ($y = x^3$), sehingga formula 5.17 berlaku untuk polinomial derajat tiga. Dari Persamaan 5.17, diperoleh perhitungan sebagai berikut.

$$c_0 + c_1 = \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2 \tag{5.18}$$

$$c_0 x_0 + c_1 x_1 = \int_{-1}^{1} x\, dx = 0 \tag{5.19}$$

$$c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3} \tag{5.20}$$

$$c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3 = \int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0 \tag{5.21}$$

Dari Persamaan 9.10-9.13, diperoleh $c_0 = c_1 = 1, x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, dan $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Dengan mensubstitusikan hasil yang diperoleh kedalam Persamaan 5.17, dapat diperoleh rumus Kuadratur Gauss Legendre dengan dua titik sebagai berikut:

$$I = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{5.22}$$

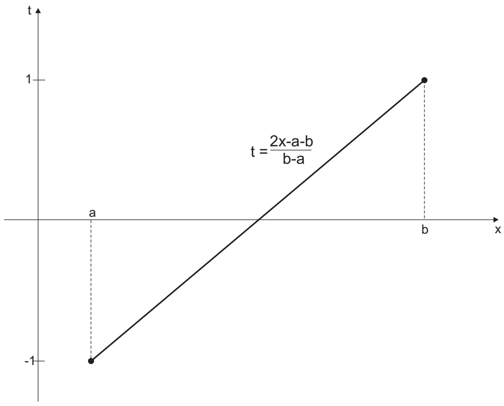
Sebagai catatan, bahwa Persamaan 9.10-9.13 menggunakan batas integrasi dari -1 hingga 1 untuk penyederhanaan proses perhitungan. Andaikan batas integrasi yang diminta bukan dari -1 hingga 1, maka batas integrasi tersebut harus diubah menjadi -1 hingga 1.

Didefinisikan persamaan linier sebagai berikut:

$$x = a_1 + a_2 x_d \tag{5.23}$$

Jika batas bawah yang diminta adalah $x = a$, maka diasumsikan $x_d = -1$, sehingga dari Persamaan 5.23 diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$a = a_1 + a_2(-1) \tag{5.24}$$



Gambar 5.8: Integrasi dengan Kuadratur Gauss jika dengan batas $x = a$ dan $x = b$

Jika batas atas yang diminta adalah $x = b$, maka diasumsikan $x_d = 1$, sehingga dari Persamaan 5.23 diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$b = a_1 + a_2(1) \tag{5.25}$$

Dari Persamaan 5.24 dan 5.25, dapat diperoleh penyelesaian sebagai berikut.

$$a_1 = \frac{b+a}{2} \ , \ a_2 = \frac{b-a}{2} \tag{5.26}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan 5.26 ke dalam Persamaan 5.23, dapat diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$x = \frac{(b+a)+(b-a)x_d}{2} \tag{5.27}$$

Dengan menurunkan kedua ruas pada Persamaan 5.27 terhadap x, dapat diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$dx = \frac{b-a}{2}\, dx_d \tag{5.28}$$

Dengan demikian :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{2} \int_a^b f\left(\frac{(b+a)+(b-a)x_d}{2}\right) dx_d \tag{5.29}$$

Contoh 5.2.2 Tentukan nilai dari

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\ x\, dx$$

Penyelesaian
Dengan menggunakan Persamaan 5.27

$$x = \frac{(\frac{\pi}{2} - 0)x_d + \frac{\pi}{2} + 0}{2} = \frac{\pi x_d + \pi}{4} = \frac{\pi}{4}(x_d + 1)$$

sehingga:

$$dx = \frac{\pi}{4} dx_d$$

Dengan demikian :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \sin\, x\, dx \\ &= \frac{\pi}{4} \int_{-1}^{1} \sin\left(\frac{\pi}{4}(x_d + 1)\right)\, dx_d \\ &= \frac{\pi}{4}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}} + 1\right)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{4}(\sin\, 0.10566\pi + \sin\, 0.39434\pi) \\ &= 0.99847 \end{aligned}$$

Nilai error diperoleh dari selisih antara hasil perhitungan analitik dengan hasil perhitungan numerik. Sehingga diperoleh nilai error sebagai berikut:
Error $= 1 - 0.99847 = 0.00153$ ◀

Untuk lebih memahami materi yang telah diuraikan di atas, Perhatikan contoh berikut ini.

CONTOH 5.2.3 Diketahui integral

$$\int_{-1}^{1} e^x \cos\, x\, dx$$

1. Selesaikan integral di atas dengan metode integrasi Romberg.

2. Selesaikan permasalahan pada no. 1 dengan metode Kuadratur Gaussian.

Penyelesaian

1. Dengan aturan komposit Trapezium, dengan beragam nilai n yang diberikan,

dapat diperoleh pendekatan $O(h^2)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
R_{1,1} &= \frac{2}{2}\left(e^{-1}\cos(-1) + e^{1}\cos(1)\right) \\
&= 1.66746 \\
R_{2,1} &= \frac{1}{2}\left(e^{-1}\cos(-1) + 2e^{0}\cos(0) + e^{1}\cos(1)\right) \\
&= 1.83373 \\
R_{3,1} &= \frac{1}{3}\left(e^{-1}\cos(-1) + 2\left(e^{\frac{-1}{3}}\cos\left(\frac{-1}{3}\right)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.+e^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\right)\right) + e^{1}\cos(1)\right) \\
&= 1.88641 \\
R_{4,1} &= \frac{1}{4}\left(e^{-1}\cos(-1) + 2\left(e^{\frac{-1}{2}}\cos\left(\frac{-1}{2}\right)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.+e^{0}\cos 0 + e^{\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{1}{2}\right)\right) + e^{1}\cos(1)\right) \\
&= 1.90645 \\
R_{5,1} &= \frac{1}{5}\left(e^{-1}\cos(-1) + 2\left(e^{\frac{-3}{5}}\cos\left(\frac{-3}{5}\right) + e^{\frac{-1}{5}}\cos\left(\frac{-1}{5}\right)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.+e^{\frac{1}{5}}\cos\left(\frac{1}{5}\right) + e^{\frac{3}{5}}\cos\left(\frac{3}{5}\right)\right) + e^{1}\cos(1)\right) \\
&= 1.91600
\end{aligned}$$

Pendekatan $O(h^4)$ sebagai berikut.

$$R_{2,2} = R_{2,1} + \frac{1}{3}(R_{2,1} - R_{1,1}) = 1.88915$$
$$R_{3,2} = R_{3,1} + \frac{1}{3}(R_{3,1} - R_{2,1}) = 1.90397$$
$$R_{4,2} = R_{4,1} + \frac{1}{3}(R_{4,1} - R_{3,1}) = 1.91313$$
$$R_{5,2} = R_{5,1} + \frac{1}{3}(R_{5,1} - R_{4,1}) = 1.91919$$

Pendekatan $O(h^6)$ sebagai berikut.

$$R_{3,3} = R_{3,2} + \frac{1}{15}(R_{3,2} - R_{2,2}) = 1.90496$$
$$R_{4,3} = R_{4,2} + \frac{1}{15}(R_{4,2} - R_{3,2}) = 1.91374$$
$$R_{5,3} = R_{5,2} + \frac{1}{15}(R_{5,2} - R_{4,2}) = 1.91959$$

Pendekatan $O(h^8)$ sebagai berikut.

$$R_{4,4} = R_{4,3} + \frac{1}{63}(R_{4,3} - R_{3,3}) = 1.91338$$
$$R_{5,4} = R_{5,3} + \frac{1}{63}(R_{5,3} - R_{4,3}) = 1.91969$$

Sehingga pendekatan akhir $O(h^{10})$ sebagai berikut.

$$R_{5,5} = R_{5,4} + \frac{1}{255}(R_{5,4} - R_{4,4}) = 1.91971$$

2. Dengan menggunakan Kuadratur Gaussian:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} e^x cos\ x\, dx &= \left(e^{\frac{-1}{\sqrt{3}}} \cos\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right) + \left(e^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \cos\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\ &= 0.4704 + 1.4926 \\ &= 1.9630\end{aligned}$$

◀

Pada modul ini diberikan metode untuk menyelesaikan integrasi secara numerik, yaitu metode integrasi Romberg dan metode Kuadratur Gauss.

1. Algoritma Metode Integrasi Romberg
   Untuk mengaproksimasi nilai integral $I = \int_a^b f(x)\, dx$, dengan $n > 0$.
   INPUT: titik ujung interval a, b; bilangan bulat n.
   OUTPUT: Array R. (Menghitung R per baris, hanya 2 baris terakhir yang disimpan di penyimpanan.)

   Langkah-1 Tetapkan $h = (b-a)/N$
   $t = a$;
   $R_{1,1} = \frac{h}{2}(f(a) + f(b))$.

   Langkah-2 OUTPUT $(R_{1,1})$

   Langkah-3 For $i = 2, 3, \cdots, n$ lakukan langkah 4-8.

   Langkah-4 Tetapkan $R_{2,1} = \frac{1}{2}\left(R_{1,1} + h\sum_{k=1}^{2^{i-2}} f(a + (k-0.5)h)\right)$
   (Aproksimasi dengan metode Trapezium)

   Langkah-5 Untuk $j = 2, \cdots, i$
   tetapkan $R_{2,j} = R_{2,j-1} + \frac{R_{2,j-1} - R_{1,j-1}}{4^{j-1}-1}$ (Ekstrapolasi)

   Langkah-6 OUTPUT ($R_{2,j}$ untuk $j = 1, 2, \cdots, i$).

   Langkah-7 Tetapkan $h = h/2$.

   Langkah-8 For $j = 1, 2, \cdots, i$, tetapkan $R_{1,j} = R_{2,j}$. (Perbarui baris 1 dari R)

   Langkah-9 STOP.

2. Metode Kuadratur Gauss
   Rumus Kuadratur Gauss Legendre dengan dua titik sebagai berikut.

$$I = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

   dimana batas integrasi yang digunakan dari -1 hingga 1.

SOAL-SOAL LATIHAN 5.2

Kerjakan soal-soal berikut ini untuk mengukur tingkat penguasaan Anda atas bahasan yang telah dipelajari.

1. Diketahui
$$I = \int_{1}^{1.5} x^2 ln\, x\, dx$$
Dengan menggunakan metode integrasi Romberg dan metode Kuadratur Gauss dengan $n = 2$, serta hitung errornya.

2. Selesaikan
$$J = \int_{3}^{3.5} \frac{x}{x^2 - 4}\, dx$$
Dengan menggunakan metode integrasi Romberg dan metode Kuadratur Gauss dengan $n = 2$.

3. Dengan menggunakan metode integrasi Romberg metode Kuadratur Gauss dengan $n = 2$, selesaikan
$$K = \int_{0}^{\pi/4} (cos\, x)^2\, d$$

Bab 6

Diferensiasi Numerik

Dalam beberapa permasalahan, seringkali dijumpai suatu fungsi yang sulit untuk didiferensiasi (diturunkan) secara analitik. Sebagai contoh, diberikan fungsi jarak z dari bola yang dijatuhkan dalam waktu t sebagai berikut.

$$z(t) = \frac{m}{c_d} \ln \left| \cosh \sqrt{\frac{g\ c_d}{m}}\ t \right|$$

Dari fungsi jarak tersebut, diminta untuk menentukan fungsi kecepatan, yaitu perubahan dari jarak tiap satuan waktu. Fungsi kecepatan bisa diperoleh dengan cara menurunkan fungsi jarak tersebut terhadap t. Secara analitik, fungsi kecepatan tersebut cukup sulit untuk diturunkan.

Untuk mengatasi permasalahan tersebut, dan permasalahan lain yang serupa, dikenalkan metode untuk menurunkan suatu fungsi secara numerik. Metode yang diperkenalkan yaitu melalui pendekatan deret Taylor dan melalui ekstrapolasi Richardson.

6.1 Pendekatan Deret

Turunan dari suatu fungsi f di x_0 dengan nilai h yang sangat kecil didefinisikan sebagai berikut.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Untuk mendapatkan nilai pendekatan dari $f'(x_0)$, yaitu dengan cara memisalkan

$$x_0 \in (a, b) \quad \text{dengan} \quad f \in C^2[a, b],$$

dan

$$x_1 = x_0 + h \quad \text{dengan} \quad h \neq 0$$

dan memastikan bahwa $x_1 \in [a, b]$ dan dengan mengkontruksi polinomial Lagrange order pertama $P_{0,1}(x)$ dari x_0 dan x_1 sebagai berikut.

$$f(x) = P_{0,1}(x) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!} f''(\xi(x))$$

dengan

$$P_{0,1}(x) = \frac{f(x_0)(x - x_0 - h)}{-h} + \frac{f(x_0 + h)(x - x_0)}{h}$$

dimana $\xi(x) \in (x_0, x_1)$, dan jika diturunkan didapat

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + D_x\left[\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2}f''(\xi(x))\right] \\ &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + \frac{2(x-x_0)-h}{2}f''(\xi(x)) \\ &\quad + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2}D_x(f''(\xi(x))) \end{aligned}$$

dengan menghapus fungsi yang mengandung $\xi(x))$ didapat

$$f'(x) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

satu kesulitan dari rumus ini adalah tidak ada informasi tentang kesalahan pemotongan tidak dapat disetimasi. Ketika x adalah x_0, koefisien dari $D_x(f''(\xi(x)))$ adalah 0, dan rumus menjadi lebih sederhana, yaitu

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi) \tag{6.1}$$

Persamaan 6.1 tersebut dikenal dengan rumus beda maju jika $h > 0$ dan merupakan rumus beda mundur jika $h < 0$.

Contoh 6.1.1 Dengan menggunakan rumus beda maju, aproksimasi turunan dari $f(x) = \ln x$ pada $x_0 = 1.8$ dengan menggunakan $h = 0.1, h = 0.05$ dan $h = 0.01$, dan tentukan batas perkiraan kesalahan.

Penyelesaian

Rumus beda maju untuk $x_0 = 1.8$ didefinisikan sebagai berikut.

$$\frac{f(1.8+h)-f(1.8)}{h}$$

untuk $h = 0.1$:

$$\frac{\ln 1.9 - \ln 1.8}{0.1} = \frac{0.64185389 - 0.58778667}{0.1} = 0.5406722$$

Karena $f''(x) = 1/x^2$ dan $1.8 < \xi < 1.9$, maka batasan aproksimasi error dapat diperoleh sebagai berikut.

$$\frac{|hf''(\xi)|}{2} = \frac{|h|}{2\xi^2} < \frac{0.1}{2(1.8)^2} = 0.0154321$$

Dengan cara yang sama, aproksimasi untuk $h = 0.05$ dan $h = 0.01$ dapat diperoleh, dan ditunjukkan dalam Tabel berikut.

h	$f(1.8+h)$	$\frac{f(1.8+h)-f(1.8)}{h}$	$\frac{\|h\|}{2(1.8)^2}$
0.1	0.64185389	0.5406722	0.0154321
0.05	0.61518564	0.5479795	0.0077160
0.01	0.59332685	0.5540180	0.0015432

◄

Untuk memperoleh bentuk umum dari aproksimasi turunan, didefinisikan fungsi f sebagai berikut.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x) + \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi(x))$$

dimana $L_k(x)$ menyatakan koefisien polinomial Lagrange dari f. Dengan menurunkan terhadap x diperoleh rumus $(n+1)$ titik sebagai berikut.

$$f'(x_j) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k'(x_j) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x_j))}{(n+1)!} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (x_j - x_k) \tag{6.2}$$

Berikut ini diberikan formulasi aproksimasi turunan dengan menggunakan tiga titik dan lima titik.

Formulasi Tiga Titik

Diketahui tiga titik yaitu x_0, $x_1 = x_0 + h$, dan $x_2 = x_0 + 2h$, dengan $h \neq 0$, maka

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \quad \text{dengan} \quad L_0'(x) = \frac{2x-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \quad \text{dengan} \quad L_1'(x) = \frac{2x-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \quad \text{dengan} \quad L_2'(x) = \frac{2x-x_0-x_1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}
\end{aligned}$$

dari Persamaan 6.2, menjadi

$$\begin{aligned}
f'(x_j) &= f(x_0)\left[\frac{2x_j-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right] + f(x_1)\left[\frac{2x_j-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right] \\
&+ f(x_2)\left[\frac{2x_j-x_0-x_1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right] + \frac{1}{6}f^{(3)}(\xi_j)\prod_{k=0,k\neq j}^{2}(x_j-x_k) \\
&\text{dengan} \quad j = 0,1,2
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Dengan menggunakan Persamaan 6.3 dan $x_j = x_0$, maka

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= f(x_0)\left[\frac{2x_0-(x_0+h)-(x_0+2h)}{(x_0-(x_0+h))(x_0-(x_0+2h))}\right] \\
&+f(x_1)\left[\frac{2x_0-x_0-(x_0+2h)}{(x_0+h-x_0)(x_0+h-x_0-2h)}\right] \\
&+f(x_2)\left[\frac{2x_0-x_0-(x_0+h)}{(x_0-x_0-h)(x_0-x_0-2h)}\right] \\
&+\frac{1}{6}f^{(3)}(\xi_j)\left[(x_0-x_0-h)(x_0-x_0-2h)\right]
\end{aligned}$$

kemudian disederhanakan, menjadi

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= f(x_0)\left[\frac{2x_0 - x_0 - h - x_0 - 2h}{(x_0 - x_0 - h)(x_0 - x_0 - 2h)}\right] \\
&\quad + f(x_1)\left[\frac{2x_0 - x_0 - x_0 - 2h}{(x_0 + h - x_0)(x_0 + h - x_0 - 2h)}\right] \\
&\quad + f(x_2)\left[\frac{2x_0 - x_0 - x_0 - h}{(x_0 - x_0 - h)(x_0 - x_0 - 2h)}\right] \\
&\quad + \frac{1}{6}f^{(3)}(\xi_j)\left[(x_0 - x_0 - h)(x_0 - x_0 - 2h)\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[-\frac{3}{2}f(x_0) + 2f(x_1) - \frac{1}{2}f(x_2)\right] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0)
\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= f(x_0)\left[\frac{-3h}{2h^2}\right] + f(x_1)\left[\frac{-2h}{-h^2}\right] + f(x_2)\left[\frac{-h}{2h^2}\right] \\
&\quad + \frac{1}{6}f^{(3)}(\xi_j)\left[(-h)(-2h)\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[-\frac{3}{2}f(x_0) + 2f(x_1) - \frac{1}{2}f(x_2)\right] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0)
\end{aligned}$$

dengan cara yang untuk $x_j = x_1$, maka

$$f'(x_1) = \frac{1}{h}\left[-\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_2)\right] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$

sedangkan untuk $x_j = x_2$, maka

$$f'(x_2) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}f(x_0) - 2f(x_1) + \frac{3}{2}f(x_2)\right] + -\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2)$$

Telah diketahui di atas bahwa $x_1 = x_0 + h$ dan $x_2 = x_0 + 2h$, maka ketiga rumus di atas dapat ditulis ulang sebagai berikut

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \frac{1}{h}\left[-\frac{3}{2}f(x_0) + 2f(x_0 + h) - \frac{1}{2}f(x_0 + 2h)\right] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0) \\
f'(x_0 + h) &= \frac{1}{h}\left[-\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_0 + 2h)\right] - \frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1) \\
f'(x_0 + 2h) &= \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}f(x_0) - 2f(x_0 + h) + \frac{3}{2}f(x_0 + 2h)\right] + \frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2)
\end{aligned}$$

Untuk memudahkan pemahaman berikutnya, substitusikan x_0 ke x_0+h yang digunakan untuk persamaan tengah sehingga mengubah rumus pendekatan untuk $f'(x_0)$. Oleh karena itu ketiga persamaan di atas berubah menjadi

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \frac{1}{2h}\left[-3f(x_0)+4f(x_0+h)-f(x_0+2h)\right]+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0) \\
f'(x_0) &= \frac{1}{2h}\left[-f(x_0-h)+f(x_0+h)\right]-\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1) \\
f'(x_0) &= \frac{1}{2h}\left[f(x_0-2h)-4f(x_0-h)+3f(x_0)\right]+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2)
\end{aligned}$$

terlihat bahwa persamaan yang pertama dan yang ketiga hampir sama, yang membedakan hanya pada h dan $-h$, sehingga rumus yang diperlukan cukup dua yaitu

1. Rumus Tiga Titik Akhir

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}(-3f(x_0)+4f(x_0+h)-f(x_0+2h))+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0) \tag{6.4}$$

   dengan $\xi_0 \in (x_0, x_0+2h)$.
   Rumus tiga titik akhir efektif digunakan untuk mengaproksimasi titik yang berada disekitar ujung interval.

2. Rumus Tiga Titik Tengah

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}(f(x_0+h)-f(x_0-h))-\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1) \tag{6.5}$$

   dengan $\xi_1 \in (x_0-h, x_0+h)$

Formulasi Lima Titik
Diketahui lima titik yaitu $x_0, x_1, x_2, x_3,$ dan x_4. Formulasi lima titik untuk mengaproksimasi $f'(x_0)$ didefinisikan sebagai berikut.

1. Rumus Lima Titik Akhir

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \frac{1}{12h}(-25f(x_0)+48f(x_0+h)-36f(x_0+2h) \\
&\quad +16f(x_0+3h)-3f(x_0+4h))+\frac{h^4}{5}f^{(5)}(\xi)
\end{aligned} \tag{6.6}$$

   dengan $\epsilon \in (x_0, x_0+4h)$.
   Formula lima titik akhir akan efektif digunakan untuk mengaproksimasi titik yang berada disekitar ujung interval.

2. Rumus Lima Titik Tengah

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \frac{1}{12h}(f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+h) \\
&\quad -f(x_0+2h))+\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi)
\end{aligned} \tag{6.7}$$

   dengan $\xi_1 \in (x_0-2h, x_0+2h)$

CONTOH 6.1.2 Didefinisikan $f(x) = xe^x$ dengan tabel di bawah, aproksimasi nilai dari $f'(2.0)$ dengan menggunakan rumus tiga titik dan lima titik dengan $h = 0.1$ dan $h = 0.2$.

x	$f(x)$
1.8	10.889365
1.9	12.703199
2.0	14.778112
2.1	17.148957
2.2	19.855030

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan soal ini, bisa digunakan empat rumus tiga titik, yaitu tiga titik akhir dengan Rumus 6.4 dan dengan $h = 0.1$ atau $h = -0.1$, dan rumus tiga titik tengah dengan Rumus 6.5 dan dengan $h = 0.1$ atau $h = 0.2$. dan rumus lima titik tengah.

1. Tiga titik akhir dengan $h = 0.1$

   Dengan menggunakan rumus tiga titik akhir dengan Rumus 6.4, diperoleh:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{2h}(-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)) \\ f'(2.0) &= \frac{1}{0.2}(-3f(2.0) + 4f(2.1) - f(2.2)) \\ &= 5(-3(14.778112) + 4(17.148957) - 19.855030) \\ &= 22.032310 \end{aligned}$$

2. Tiga titik akhir dengan $h = -0.1$

   Dengan menggunakan rumus tiga titik akhir dengan Rumus 6.4, diperoleh:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{2h}(-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)) \\ f'(2.0) &= \frac{1}{0.2}(-3f(2.0) + 4f(1.9) - f(1.8)) \\ &= (-5)(-3(14.778112) + 4(12.703199) - 10.889365) \\ &= 22.054525 \end{aligned}$$

3. Tiga titik tengah dengan $h = 0.1$

   Dengan menggunakan rumus tiga titik tengah dengan Rumus 6.5, diperoleh:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{2h}(f(x_0 + h) - f(x_0 - h)) \\ f'(2.0) &= \frac{1}{0.1}(f(2.1) - f(1.9)) \\ &= 5(17.148957 - 12.703199) \\ &= 22.228790 \end{aligned}$$

4. Tiga titik tengah dengan $h = 0.2$

Dengan menggunakan rumus tiga titik tengah dengan Rumus 6.5, diperoleh:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \frac{1}{2h}(f(x_0+h) - f(x_0-h)) \\
f'(2.0) &= \frac{1}{0.2}(f(2.2) - f(1.8)) \\
&= 2.5(19.855030 - 10.889365) \\
&= 22.414163
\end{aligned}$$

5. Lima titik tengah dengan $h = 0.1$
   Dengan menggunakan rumus lima titik tengah dengan Rumus 6.7, diperoleh:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \frac{1}{12h}(f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) \\
&\quad -f(x_0+2h)) \\
f'(2.0) &= \frac{1}{12*0.1}(f(1.8) - 8f(1.9) + 8f(2.1) - f(2.2)) \\
&= \frac{1}{1.2}(10.889365 - 8(12.703199) + 8(17.148957) \\
&\quad -19.855030) \\
&= 22.166999
\end{aligned}$$

Selanjutnya, nilai aproksimasi tersebut dapat dibandingkan dengan nilai eksak: $f'(2.0) = (2+1)e^2 = 22.167168$, sehingga diperoleh nilai kesalahan antara nilai eksak dan nilai aproksimasi sebagai berikut.

1. Kesalahan rumus tiga titik akhir dengan $h = 0.1$ adalah 1.35×10^{-1}
2. Kesalahan rumus tiga titik akhir dengan $h = -0.1$ adalah 1.15×10^{-1}
3. Kesalahan rumus tiga titik tengah dengan $h = 0.1$ adalah -6.16×10^{-2}
4. Kesalahan rumus tiga titik tengah dengan $h = 0.2$ adalah -2.47×10^{-1}
5. Kesalahan rumus lima titik akhir dengan $h = 0.1$ adalah 1.69×10^{-4}

◀

Untuk lebih memahami materi yang telah diuraikan di atas, perhatikan contoh berikut ini!

CONTOH 6.1.3 Diberikan data pada tabel sebagai berikut.

x	$f(x)$	$f'(x)$
1.1	9.025013	
1.2	11.02318	
1.3	13.46374	
1.4	16.44465	
1.5	20.08554	

Lengkapilah data pada tabel tersebut dengan formula tiga titik dan lima titik.

Penyelesaian
Terlihat pada tabel, bahwa $h = 0.1$ dan untuk melengkapi tabel di atas, perlu diketahui empat rumus di atas, yaitu rumus tiga titik akhir (Rumus 6.4), yaitu

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}(-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h))$$

tiga titik tengah (Rumus 6.5), yaitu

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}(f(x_0 + h) - f(x_0 - h))$$

lima titik akhir (Rumus 6.6), yaitu

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}(-25f(x_0) + 48f(x_0 + h) - 36f(x_0 + 2h) + 16f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 4h))$$

dan lima titik tengah (Rumus 6.7), yaitu

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}(f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h))$$

Oleh karena itu untuk mengisi tabel di atas, perhatikan berikut ini:

1. Untuk mencari nilai $f'(1.1)$ dapat menggunakan
   (a) Rumus 6.4 dengan $h = 0.1$, yaitu
   $$\begin{aligned} f'(1.1) &= \frac{1}{2 \times 0.1}(-3 \times f(1.1) + 4 \times f(1.2) - f(1.3)) \\ &= \frac{1}{0.2}(-3 \times 9.02501 + 4 \times 11.0232 - 13.4637) \\ &= 17.76971 \end{aligned}$$
   (b) Rumus 6.4 dengan $h = 0.2$, yaitu
   $$\begin{aligned} f'(1.1) &= \frac{1}{2 \times 0.2}(-3 \times f(1.1) + 4 \times f(1.3) - f(1.5)) \\ &= \frac{1}{0.4}(-3 \times 9.02501 + 4 \times 13.4637 - 20.0855) \\ &= 16.73595 \end{aligned}$$
   (c) Rumus 6.6 dengan $h = 0.1$, yaitu
   $$\begin{aligned} f'(1.1) &= \frac{1}{12 \times 0.1}(-25 \times f(1.1) + 48 \times f(1.2) - 36 \times f(1.3) \\ &\quad +16 \times f(1.4) - 3 \times f(1.5)) \\ &= \frac{1}{1.2}(-25 \times 9.02501 + 48 \times 11.0232 - 36 \times 13.4637 \\ &\quad +16 \times 16.4447 - 3 \times 20.0855) \\ &= 18.04205 \end{aligned}$$

2. Untuk mencari nilai $f'(1.2)$ dapat menggunakan

   (a) Rumus 6.4 dengan $h = 0.1$, yaitu

$$\begin{aligned} f'(1.2) &= \frac{1}{2 \times 0.1}(-3 \times f(1.2) + 4 \times f(1.3) - f(1.4)) \\ &= \frac{1}{0.2}(-3 \times 11.0232 + 4 \times 13.4637 - 16.4447) \\ &= 21.70385 \end{aligned}$$

   (b) Rumus 6.5 dengan $h = 0.1$, yaitu

$$\begin{aligned} f'(1.2) &= \frac{1}{2 \times 0.1}(f(1.3) - f(1.1)) \\ &= \frac{1}{0.2}(13.4637 - 9.02501) \\ &= 22.19364 \end{aligned}$$

3. Untuk mencari nilai $f'(1.3)$ dapat menggunakan

   (a) Rumus 6.4 dengan $h = 0.1$, yaitu

$$\begin{aligned} f'(1.3) &= \frac{1}{2 \times 0.1}(-3 \times f(1.3) + 4 \times f(1.4) - f(1.5)) \\ &= \frac{1}{0.2}(-3 \times 13.4637 + 4 \times 16.4447 - 20.0855) \\ &= 26.5092 \end{aligned}$$

   (b) Rumus 6.4 dengan $h = -0.1$, yaitu

$$\begin{aligned} f'(1.3) &= \frac{1}{2 \times -0.1}(-3 \times f(1.3) + 4 \times f(1.2) - f(1.1)) \\ &= \frac{1}{-0.2}(-3 \times 13.4637 + 4 \times 11.0232 - 9.02501) \\ &= 26.61757 \end{aligned}$$

   (c) Rumus 6.5 dengan $h = 0.1$, yaitu

$$\begin{aligned} f'(1.3) &= \frac{1}{2 \times 0.1}(f(1.4) - f(1.2)) \\ &= \frac{1}{0.2}(16.4447 - 11.0232) \\ &= 27.10735 \end{aligned}$$

   (d) Rumus 6.5 dengan $h = 0.2$, yaitu

$$\begin{aligned} f'(1.3) &= \frac{1}{2 \times 0.2}(f(1.5) - f(1.1)) \\ &= \frac{1}{0.4}(20.08557 - 9.02501) \\ &= 27.65132 \end{aligned}$$

(e) Rumus 6.7 dengan $h = 0.1$

$$\begin{aligned} f'(1.3) &= \frac{1}{12 \times 0.1}(f(1.1) - 8 \times f(1.2) + 8 \times f(1.4) - f(1.5)) \\ &= \frac{1}{1.2}(9.02501 - 8 \times 11.0232 + 8 \times 16.4447 - 20.0855) \\ &= 26.92603 \end{aligned}$$

4. Untuk mencari nilai $f'(1.4)$ dapat menggunakan

(a) Rumus 6.4 dengan $h = -0.1$, yaitu

$$\begin{aligned} f'(1.4) &= \frac{1}{2 \times -0.1}(-3 \times f(1.4) + 4 \times f(1.3) - f(1.2)) \\ &= \frac{1}{-0.2}(-3 \times 16.4447 + 4 \times 13.4637 - 11.0232) \\ &= 32.51085 \end{aligned}$$

(b) Rumus 6.5 dengan $h = 0.1$, yaitu

$$\begin{aligned} f'(1.4) &= \frac{1}{2 \times 0.1}(f(1.5) - f(1.3)) \\ &= \frac{1}{0.2}(20.0855 - 13.4637) \\ &= 33.109 \end{aligned}$$

5. Untuk mencari nilai $f'(1.5)$ dapat menggunakan

(a) Rumus 6.4 dengan $h = -0.1$, yaitu

$$\begin{aligned} f'(1.5) &= \frac{1}{2 \times -0.1}(-3 \times f(1.5) + 4 \times f(1.4) - f(1.3)) \\ &= \frac{1}{-0.2}(-3 \times 20.0855 + 4 \times 16.4447 - 13.4637) \\ &= 39.7088 \end{aligned}$$

(b) Rumus 6.4 dengan $h = -0.2$, yaitu

$$\begin{aligned} f'(1.5) &= \frac{1}{2 \times -0.2}(-3 \times f(1.5) + 4 \times f(1.3) - f(1.1)) \\ &= \frac{1}{-0.4}(-3 \times 20.0855 + 4 \times 13.4637 - 9.02501) \\ &= 38.56668 \end{aligned}$$

(c) Rumus 6.6 dengan $h = -0.1$

$$
\begin{aligned}
f'(1.5) &= \frac{1}{12 \times -0.1}(-25 \times f(1.5) + 48 \times f(1.4) - 36 \times f(1.3) \\
&\quad +16 \times f(1.2) - 3 \times f(1.1)) \\
&= \frac{1}{-1.2}(-25 \times 20.0855 + 48 \times 16.4447 - 36 \times 13.4637 \\
&\quad +16 \times 11.0232 - 3 \times 9.02501) \\
&= 40.16175
\end{aligned}
$$

◀

Berikut ini diperikan formulasi aproksimasi turunan dengan menggunakan tiga titik dan lima titik.

Rumus Tiga Titik

1. Rumus Tiga Titik Akhir

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}(-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)) + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(\xi_0)$$

dengan $\xi_0 \in (x_0, x_0 + 2h)$.

2. Rumus Tiga Titik Tengah

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}(f(x_0 + h) - f(x_0 - h)) - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi_1)$$

dengan $\xi_1 \in (x_0 - h, x_0 + h)$

Rumus Lima Titik

1. Rumus Lima Titik Akhir

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \frac{1}{12h}(-25f(x_0) + 48f(x_0 + h) - 36f(x_0 + 2h) \\
&= +16f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 4h)) + \frac{h^4}{5} f^{(5)}(\xi)
\end{aligned}
$$

dengan $\xi \in (x_0, x_0 + 4h)$.

2. Rumus Lima Titik Tengah

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \frac{1}{12h}(f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) \\
&\quad -f(x_0 + 2h)) + \frac{h^4}{30} f^{(5)}(\xi)
\end{aligned}
$$

dengan $\xi_1 \in (x_0 - 2h, x_0 + 2h)$

SOAL-SOAL LATIHAN 6.1

Kerjakan soal-soal berikut ini untuk mengukur tingkat penguasaan bahasan yang telah dipelajari.

Diketahui $f(1.1) = 1.52918, f(1.2) = 1.64024, f(1.3) = 1.70470$, dan $f(1.4) = 1.71277$.

1. Dengan formula tiga titik endpoint, tentukan nilai dari $f'(1.1)$.
2. Tentukan nilai dari $f'(1.2)$ dengan formula tiga titik endpoint?
3. Carilah nilai dari $f'(1.3)$ dengan formula tiga titik midpoint?
4. Dengan formula tiga titik endpoint, tentukan nilai dari $f'(1.4)$.
5. Jika diberikan $f(x) = xsin\,x + x^2cos\,x$, tentukan nilai error dari $f'(1.1)$.

Diketahui $f(2.9) = -4.827866$, $f(3.0) = -4.240058$, $f(3.1) = -3.496909$, dan $f(3.2) = -2.596792$.

6. Dengan formula tiga titik endpoint, tentukan nilai dari $f'(2.9)$.
7. Dengan formula tiga titik endpoint, tentukan nilai dari $f'(3.0)$
8. Dengan formula tiga titik midpoint, tentukan nilai dari $f'(3.1)$
9. Dengan formula tiga titik endpoint, tentukan nilai dari $f'(3.2)$
10. Jika diberikan $f(x) = 2.5x\,ln\,x$, tentukan nilai error dari $f'(2.9)$.

6.2 Metode Ekstrapolasi Richardson

Ekstrapolasi Richardson digunakan untuk menapatkan nilai pendekatan yang lebih akurat ketika digunakan rumus dengan order yang lebih rendah. Ekstrapolasi dapat diaplikasikan jika diketahui pendekatan suku kesalahan dengan kesalahan yang dapat diprediksi, yang bergantung pada parameter. Misalkan h $(h \neq 0)$ adalah ukuran langkah awal, maka dapat diperoleh rumus $N_1(h)$ yang didekati oleh konstanta M. Kesalahan pemotongan yang mempengaruhi nilai pendekatan mempunyai bentuk sebagai berikut,

$$M - N_1(h) = K_1h + K_2h^2 + K_3h^3 + \cdots$$

dengan $K_1, K_2, \cdots$ merupakan konstanta. Kesalahan pemotongan adalah $O(h)$, kecuali variasi konstanta yang besar yaitu K_1, K_2, K_3, $\cdots$, maka

$$M - N_1(0.1) \approx 0.1K_1, \quad M - N_1(0.01) \approx 0.01K_1$$

dan secara umum ditulis

$$M - N_1(h) \approx K_1h$$

Selanjutnya, rumus $N_1(h)$ dapat dikombinasikan untuk mengaproksimasi $O(h^2)$, yaitu $N_2(h)$, sebagai berikut.

$$M - N_2(h) = \hat{K}_2 h^2 + \hat{K}_3 h^3 + \cdots$$

dengan $\hat{K}_2, \hat{K}_3, \cdots$ merupakan konstanta.

Jika K_1 dan $\hat{K}_2$ mempunyai nilai yang besar yang hampir sama, maka pendekatan $N_2(h)$ lebih baik dibandingkan pendekatan $N_1(h)$. Selanjutnya proses ekstrapolasi dilanjutkan dengan mengombinasikan pendekatan $N_2(h)$ untuk mengaproksimasi $O(h^3)$, dan seterusnya.

Secara lebih jelas mengenai cara mendapatkan rumus ekstrapolasi, diberikan rumus pendekatan $O(h)$ dengan nilai M.

$$M = N_1(h) + K_1 h + K_2 h^2 + K_3 h^3 + \cdots \tag{6.8}$$

untuk $h > 0$.

Dengan mengganti h dengan $\frac{h}{2}$, dapat diperoleh rumus pendekatan $O(h)$ yang kedua sebagai berikut.

$$M = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + K_1 \frac{h}{2} + K_2 \frac{h^2}{4} + K_3 \frac{h^3}{8} + \cdots \tag{6.9}$$

Kurangkan Persamaan 6.8 dengan dua kali Persamaan 6.9 untuk mengeliminasi nilai K_1, diperoleh:

$$M = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \left(N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right) + K_2\left(\frac{h^2}{2} - h^2\right) + K_3\left(\frac{h^3}{4} - h^3\right) + \cdots \tag{6.10}$$

dan jika

$$N_2(h) = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \left(N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right)$$

sehingga diperoleh rumus pendekatan dengan $O(h^2)$ sebagai berikut.

$$M = N_2(h) - \frac{K_2}{2} h^2 - \frac{3K_3}{4} h^3 - \cdots \tag{6.11}$$

Contoh 6.2.1 Diberikan $f(x) = \ln(x)$. Dengan menggunakan ekstrapolasi dari rumus kesalahan pemotongan $O(h)$, Hitunglah nilai aproksimasi dari $f'(1.8)$?

Penyelesaian

Dari Contoh 6.1.1, diperoleh

$$f'(1.8) \approx 0.5406722, \quad \text{untuk} \quad h = 0.1$$

dan

$$f'(1.8) \approx 0.5479795, \quad \text{untuk} \quad h = 0.05$$

Sehingga:

$$N_1(0.1) = 0.5406722 \quad \text{dan} \quad N_1(0.05) = 0.5479795$$

Dengan melakukan ekstrapolasi terhadap hasil tersebut, diperoleh pendekatan baru sebagai berikut.

$$\begin{aligned} N_2(0.1) &= N_1(0.05) + (N_1(0.05) - N_1(0.1)) \\ &= 0.5479795 + (0.5479795 - 0.5406722) \\ &= 0.555287 \end{aligned}$$

sedangkan nilai dari

$$f'(1.8) = \frac{1}{1.8} = 0.5555556 = 0.\bar{5}$$

sehingga nilai keakuratan dari ekstrapolasi untuk $h = 0.1$ adalah

$$\frac{1}{1.8} - 0.5406722 = 0.01488 < 1.5 \times 10^{-2}$$

sedangkan untuk $h = 0.05$ adalah

$$\frac{1}{1.8} - 0.5479795 = 0.007576056 < 7.6 \times 10^{-3}$$

dan untuk ekstrapolasi Richardson dengan $h = 0.1$ adalah

$$\frac{1}{1.8} - 0.555287 = 0.000258 < 2.6 \times 10^{-4}$$

◀

Ekstrapolasi dapat diaplikasikan ketika rumus kesalahan pemotongan berbentuk sebagai berikut.

$$\sum_{j=1}^{m-1} K_j h^{\alpha_j} + O(h^{\alpha_m})$$

dengan K_j konstanta, dan $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots < \alpha_m$.

Banyak rumus digunakan untuk ekstrapolasi kesalahan pemotongan yang hanya memuat h dengan pangkat genap, dengan bentuk sebagai berikut.

$$M = N_1(h) + K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6 + \cdots \qquad (6.12)$$

Ekstrapolasi lebih efektif ketika semua pangkat dari h ditampilkan, karena kebanyakan proses menghasilkan kesalahan $O(h^2), O(h^4), O(h^6), \cdots$, sehingga tidak memerlukan perhitungan tambahan, dibandingkan dengan kesalahan $O(h), O(h^2), O(h^3), \cdots$.

Dengan mengganti h dengan $\frac{h}{2}$ pada Persamaan 6.12, dapat diperoleh rumus $O(h^2)$ sebagai berikut

$$M = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + K_1\frac{h^2}{4} + K_2\frac{h^4}{16} + K_3\frac{h^4}{64} + \cdots$$

Kurangilah persamaan terakhir dengan empat kali Persamaan 6.12, akan diperoleh rumus dengan $O(h^4)$ sebagai berikut.

$$3M = \left(4N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right) + K_2\left(\frac{h^4}{4} - h^4\right) + K_3\left(\frac{h^6}{16} - h^6\right) + \cdots$$

atau

$$M = \frac{1}{3}\left(4N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right) + \frac{K_2}{3}\left(\frac{h^4}{4} - h^4\right) + \frac{K_3}{3}\left(\frac{h^6}{16} - h^6\right) + \cdots$$

dan jika

$$\begin{aligned} N_2(h) &= \frac{1}{3}\left(4N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right) \\ &= N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right) \end{aligned}$$

Tabel 6.1

$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$
$1 : N_1(h)$			
$2 : N_1\left(\frac{h}{2}\right)$	$3 : N_2(h)$		
$4 : N_1\left(\frac{h}{4}\right)$	$5 : N_2\left(\frac{h}{2}\right)$	$6 : N_3(h)$	
$7 : N_1\left(\frac{h}{8}\right)$	$8 : N_2\left(\frac{h}{4}\right)$	$9 : N_3\left(\frac{h}{2}\right)$	$10 : N_4(h)$

sehingga diperoleh rumus aproksimasi kesalahan pemotongan $O(h^4)$ sebagai berikut

$$M = N_2(h) - K_2\frac{h^4}{4} - K_3\frac{5h^6}{16} + \cdots \tag{6.13}$$

dengan mengganti h menjadi $\frac{h}{2}$, maka Persamaan 6.13 menjadi

$$M = N_2\left(\frac{h}{2}\right) - K_2\frac{h^4}{64} - K_3\frac{5h^6}{1024} + \cdots$$

Jika persamaan terakhir dikalikan 16 kemudian dikurangi Persamaan 6.13, hal ini dilakukan untuk menghilangkan h^4, hasilnya

$$15M = \left(16N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h)\right) + K_3\frac{15h^6}{64} + \cdots$$

atau

$$M = \frac{1}{15}\left(16N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h)\right) + K_3\frac{h^6}{64} + \cdots$$

Dengan demikian kesalahan pemotongan menjadi $O(h^6)$, dan rumus menjadi

$$\begin{aligned} N_3(h) &= \frac{1}{15}\left(16N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h)\right) \\ &= N_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{15}\left(N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h)\right) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan cara yang sama seperti di atas, maka secara umum, untuk $j = 2, 3, \cdots$, kesalahan pemotongan adalah $O(h^{2j})$ dengan rumus umum sebagai berikut:

$$N_j(h) = N_{j-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{4^{j-1}-1}\left(N_{j-1}\left(\frac{h}{2}\right) - N_{j-1}(h)\right)$$

Tabel 6.1 menunjukkan urutan pendekatan yang dihasilkan ketika

$$M = N_1(h) + K_1h^2 + K_2h^4 + K_3h^6 + \cdots \tag{6.14}$$

Dengan mengasumsikan nilai yang sesungguhnya akurat, dengan kesalahan dibawah $|N_3(h) - N_4(h)|$.

Contoh 6.2.2 Sesuai dengan Contoh 6.1.3, diberikan $f(x) = xe^x$ dengan tabel di bawah, aproksimasi nilai dari $f'(2.0)$ dengan rumus kesalahan

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}(f(x_0+h) - f(x_0-h)) - \frac{h^2}{6}f^3(x_0) - \frac{h^2}{120}f^5(x_0) - \cdots$$

Temukan kesalahan pemotongan dengan order $O(h^2)$, $O(h^4)$, dan $O(h^6)$ untuk $f'(2.0)$ dengan $h = 0.2$.

x	$f(x)$
1.8	10.889365
1.9	12.703199
2.0	14.778112
2.1	17.148957
2.2	19.855030

Penyelesaian
Pendekatan $O(h^2)$ diperoleh melalui rumusan berikut:

$$f'(x_0) = N_1(h) - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{h^4}{120}f^{(5)}(x_0) - \cdots$$

dimana

$$N_1(h) = \frac{1}{2h}(f(x_0+h) - f(x_0-h))$$

Sehingga diperoleh pendekatan $O(h^2)$ yang pertama sebagai berikut.

$$\begin{aligned} N_1(0.2) &= \frac{1}{0.4}(f(2.2) - f(1.8)) \\ &= 2.5(19.855030 - 10.889365) \\ &= 22.414160 \end{aligned}$$

Selanjutnya dilakukan perhitungan $N_1(h/2)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} N_1(0.1) &= \frac{1}{0.2}(f(2.1) - f(1.9)) \\ &= 5(17.148957 - 12.703199) \\ &= 22.228786 \end{aligned}$$

Sehingga dapat diperoleh pendekatan $O(h^4)$ yang pertama sebagai berikut.

$$\begin{aligned} N_2(0.2) &= N_1(0.1) + \frac{1}{3}(N_1(0.1) - N_1(0.2)) \\ &= 22.228786 + \frac{1}{3}(22.228786 - 22.414160) \\ &= 22.166995 \end{aligned}$$

Untuk melakukan pendekatan $O(h^6)$, diperlukan pendekatan $O(h^2)$ yang lain sebagai berikut.

$$\begin{aligned} N_1(0.05) &= \frac{1}{0.1}(f(2.05) - f(1.95)) \\ &= 10(15.924197 - 13.705941) \\ &= 22.182564 \end{aligned}$$

Sehingga dapat diperoleh pendekatan $O(h^4)$ yang lain sebagai berikut.

$$\begin{aligned} N_2(0.1) &= N_1(0.05) + \frac{1}{3}(N_1(0.05) - N_1(0.1)) \\ &= 22.182564 + \frac{1}{3}(22.182564 - 22.228786) \\ &= 22.167157 \end{aligned}$$

Sehingga dapat dihitung pendekatan $O(h^6)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} N_3(0.2) &= N_2(0.1) + \frac{1}{15}(N_2(0.1) - N_1(0.2)) \\ &= 22.167157 + \frac{1}{15}(22.167157 - 22.166995) \\ &= 22.167168 \end{aligned}$$

Sehingga pendekatan akhir akurat pada nilai 22.167 sesuai dengan nilai dari $N_2(0.2)$ dan $N_3(0.2)$.

◀

Perhatikan contoh berikut ini,

CONTOH 6.2.3 Diberikan data pada tabel sebagai berikut.

x	$f(x)$
1.1	9.025013
1.2	11.02318
1.3	13.46374
1.4	16.44465
1.5	20.08554

Hitunglah $f'(1.3)$ dengan $O(h^2)$, $O(h^4)$, dan $O(h^6)$

Penyelesaian
Jika $h = 0.2$, maka

$$\begin{aligned} f'(1.3) &= \frac{1}{2h}\left(f(1.3+h) - f(1.3-h)\right) \\ &= \frac{1}{0.4}\left(f(1.5) - f(1.1)\right) \\ &= \frac{1}{0.4}(20.08554 - 9.025013) \\ &= 27.651318 \end{aligned}$$

dan untuk pendekatan pertama dengan kesalahan $O(h^2)$ adalah

$$N_1(0.2) = \frac{1}{0.4}\left(f(1.5) - f(1.1)\right) = 27.651318$$

dan

$$N_1(0.1) = \frac{1}{0.2}\left(f(1.4) - f(1.1)\right) = 27.10735$$

untuk pendekatan pertama dengan kesalahan $O(h^4)$ adalah

$$\begin{aligned} N_2(0.2) &= N_1(0.1) + \frac{1}{3}(N_1(0.1) - N_1(0.2)) \\ &= 27.10735 + \frac{1}{3}(27.10735 - 27.651318) \\ &= 26.920273 \end{aligned}$$

sedangkan untuk mendapatkan $O(h^6)$ diperlukan hasil dari kesalahan $O(h^4)$ yang lain, yaitu

$$N_1(0.05) = \frac{1}{0.1}(f(1.35) - f(1.25))$$

tidak bisa dikerjakan karena tidak ada data untuk $f(1.35)$ dan $f(1.25)$, oleh karena itu untuk mendapat $O(h^6)$ tidak bisa dilakukan. ◀

Berikut ini diberikan formulasi ekstrapolasi Richardson dengan pendekatan $O(h^2)$ dan $O(h^4)$.

1. Rumus Pendekatan $O(h^2)$ adalah

$$N_2(h) = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \left(N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right)$$

   Sehingga diperoleh rumus aproksimasi kesalahan pemotongan $O(h^2)$ sebagai berikut

$$M = N_2(h) - \frac{1}{2}K_2h^2 - \frac{3}{4}K_3h^3 - \cdots$$

2. Rumus pendekatan $O(h^4)$, adalah

$$N_2(h) = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)\right)$$

   Sehingga diperoleh formula aproksimasi error pemotongan $O(h^4)$ sebagai berikut.

$$M = N_2(h) - \frac{1}{4}K_2h^4 - \frac{5}{16}K_3h^6 + \cdots$$

Secara umum, untuk $j = 2, 3, \cdots$, pendekatan $O(h^{2j})$ sebagai berikut.

$$N_j(h) = N_{j-1}\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{4^{j-1}-1}\left(N_{j-1}\left(\frac{h}{2}\right) - N_{j-1}(h)\right)$$

SOAL-SOAL LATIHAN 6.2

Kerjakan soal-soal berikut ini untuk mengukur tingkat penguasaan atas bahasan yang telah dipelajari.

Didefinisikan $f(x) = 2^x sin\, x$.

1. Tentukan nilai dari $f'(1.05)$ dengan $h = 0.4$, dengan pendekatan $O(h^2)$.

2. Dari soal 1, tentukan nilai dari $f'(1.05)$ dengan pendekatan $O(h^3)$
3. Dari soal 1, selesaikan permasalahan tersebut dengan $h = 0.2$.
4. Dari soal 1, tentukan nilai dari $f'(1.05)$ dengan pendekatan $O(h^3)$, dengan $h = 0.2$.
5. Dari soal 1, berapa nilai dari $|N_2(0.2) - N_3(0.2)|$?

Didefinisikan $f(x) = x^3 cos\, x$.

6. Tentukan nilai dari $f'(2.3)$ dengan $h = 0.4$, dengan pendekatan $O(h^2)$.
7. Dari soal 6, tentukan nilai dari $f'(2.3)$ dengan pendekatan $O(h^4)$
8. Dari soal 6, selesaikan permasalahan tersebut dengan $h = 0.2$.
9. Dari soal 6, tentukan nilai dari $f'(2.3)$ dengan pendekatan $O(h^4)$, dengan $h = 0.2$.
10. Dari soal 6, berapa nilai dari $|N_2(0.2) - N_4(0.2)|$?

Indeks

Daftar Pustaka

1. Steven C. Chapra dan Raymon P. Canale, Numerical Methods for Engineers, 6^{th} edition, 2010, Mc. Graw Hill, Boston.

2. Richard L. Burden dan J. Douglas Faires, Numerical Analysis, 9^{th} edition, 2011, Brooks/Cole, Boston

3. S.R.K. Iyengar dan R.K. Jain, Numerical Methods, 2009, New Age Internastional, New Delhi.

4. Jeffrey R. Chasnov, Introduction to Numerical Methods (lecture Notes for Math 3311), The Hong Kong University of Science and Technology.

Bio Data Penulis

Penulis bernama Chairul Imron, lahir di Surabaya, pada tanggal 15 Nopember 1961, merupakan anak ketiga dari tujuh bersaudara. Penulis menempuh pendidikan formal di SD Negeri Wonorejo II Surabaya, lulus tahun 1974, melanjutkan SMP Negeri IV Surabaya, lulus tahun 1977. Kemudian melanjutka ke SMA Negeri I Surabaya dan lulus pada tahun 1981. Setelah lulus dari SMA penulis melanjutkan studi di Jurusan Matematika ITS diterima sebagai mahasiswa angkatan 1981 lulus tahun 1986. Kemudian pada tahun 1988, penulis melanjutkan S2 Ilmu Komputer PAU UI sandwich dengan University of Maryland USA dan lulus pada tahun 1990. Tahun 1992 mengikuti training Ilmu Komputer di TU Delft Netherland. Pada Agustus tahun 2009, penulis melanjutkan studi S3 Matematika di FMIPA Universitas Airlangga dan lulus pada Februari 2014. **Pengalaman Kerja**: Sebagai Staf pengajar (Dosen) di Departeman Matematika, Fakultas Sains dan Analisis Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, sejak 1987 sampai dengan sekarang. **Pengalaman Jabatan**: pernah menjabat sebagai Kepala Laboratorium Database, Kepala Laboratorium Pemodelan Matematika dan Simulasi, Ketua Jurusan Matematika FMIPA ITS (1999 sampai dengan 2003), sebagai anggota Senat Akademik ITS, wakil Guru Besar Matematika FSAD ITS mulai tahun 2021 sampai dengan sekarang.

Contact Person:
imron-its@matematika.its.ac.id, atau cakimron2012@gmail.com
https://www.its.ac.id/matematika/dosen-staf/daftar-dosen/chairul-imron/

Penulis dilahirkan di Malang pada tahun 1967, merupakan anak kedua dari lima bersaudara. Menjalani Pendidikan formal dari TK Kartini, SD Jember Kidul III, SMP Negeri 2, SMA Negeri 1 di Jember. Tahun 1985 menempuh Pendidikan Sarjana di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya dan lulus tahun 1990. Tahun 1992 menjalani training Differential Equation di TU Delft Netherland. Tahun 2002 menempuh pendidikan Magister di Jurusan Teknik Elektro ITS Bidang Teknik Sistem Pengaturan, lulus tahun 2004. Pendidikan Doktoral ditempuh pada tahun 2009 dan lulus pada tahun 2013 di bidang yang sama dengan Program Magisternya. **Pengalaman Kerja**: Sejak tahun 1991 sampai sekarang mengabdikan dirinya sebagai Dosen di almamaternya Departemen Matematika ITS, Fakultas Sains dan Analitika Data. **Pengalaman Jabatan**: Penulis pernah menjabat sebagai Koordinator TA/KP, sebagai Kepala Laboratorium Pemodelan Matematika dan Simulasi Sistem dari tahun 2014-2016, sebagai Sekretaris Departemen Matematika dari 2015-2020, sebagai Wakil Dekan Fakultas Sains dan Analitika Data dari tahun 2020-2024. **Penelitian yang ditekuni**: Bidang Matematika terapan terutama terkait sistem dan kontrol bidang energi baru dan terbarukan, sistem dinamik. Selain itu penulis juga melakukan penelitian terkait metode kontrol seperti fuzzy logic control, sliding mode control dan optimal kontrol serta terapannya.

Contact Person:
mardlijah@matematika.its.ac.id
https://www.linkedin.com/in/mardlijah-amin-10674b186/ +62 82139152887
Kampus ITS Sukolilo, Surabaya Jawa Timur 60111

Penulis bernama Tahiyatul Asfihani, lahir di Gresik, pada tanggal 28 Juli 1987, merupakan anak pertama dari empat bersaudara. Penulis menempuh pendidikan formal di MI Ma'arif Sidomukti Gresik, lulus tahun 1999, melanjutkan ke SMP Negeri 1 Gresik, lulus tahun 2002. Kemudian melanjutkan ke SMA Negeri 1 Gresik dan lulus pada tahun 2005. Setelah lulus dari SMA penulis melanjutkan studi di Jurusan Matematika ITS diterima sebagai mahasiswa Angkatan 2005, lulus tahun 2009. Kemudian pada tahun 2009, penulis melanjutkan S2 di Jurusan Matematika ITS dan lulus pada tahun 2011. Pada tahun 2012, penulis melanjutkan studi S3 Ilmu Kelautan di Teknik Kelautan ITS dan lulus pada 2019. Pengalaman Kerja: sebagai staf pengajar (Dosen) di Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analisis Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, sejak 2013 sampai dengan sekarang. Pengalaman Jabatan: Koordinator Mata Kuliah Bersama Matematika ITS mulai tahun2021 sampai dengan sekarang.

Contact Person:
t_asfihani@matematika.its.ac.id
https://www.its.ac.id/matematika/dosen-staf/daftar-dosen/tahiyatul-asfihani/
Kampus ITS Sukolilo, Surabaya Jawa Timur 60111